

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ

A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON

W. SÜSS H. WEYL

56. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 3. JULI 1952)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1952

**Math.
Z.**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht. Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlags nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

Geschäftsführender Herausgeber:

H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

56. Band.

Inhalt:

1. Heft.

Seite

Baer, Prof. Dr. R., Dept. of Math. University of Illinois, Urbana (USA): Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen	1
Zeller, Dr. K., Göppingen, Burgstraße 1: Verallgemeinerte Matrixtransformationen	18
Richert, Dr. E., Göttingen, Math. Institut der Universität: Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I.	21
Puppe, Dr. S. D., Heidelberg, Math. Institut der Universität: Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten	33
Mönnig, Dr. P., Aachen, Lütticher Straße 187: Über die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen	49
Erwe, Dr. F., Bonn, Math. Seminar der Universität: Über die Schlichtheitsschranken gewisser Funktionenfamilien	57
Haacke, Dr. W., Braunschweig, Heinrichstraße 7: Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I.	65
Müller, Dozent Dr. C., Bonn, Kölnstraße 161: Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl	80
Bose, Dr. S. K., Math. Dept. Lucknow University, Lucknow (India): On Laplace Transform	84
Rose, Dr. A., 33 Cambrian Place, Ulverston, Lancashire (England): A Formalisation of Post's m -valued Propositional Calculus	94

Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen.

LOTHAR HEFFTER zum 90. Geburtstag am 11. Juni 1952 gewidmet.

Von

Reinhold Baer in Urbana, Illinois.

In der vorliegenden Untersuchung wollen wir Kriterien für die Existenz der Ringeins angeben, die sich wesentlich mit der idealtheoretischen Struktur des Ringes befassen. Das klassische Beispiel für ein solches Kriterium ist der wohlbekannte Satz, daß die Eins in halbeinfachen Ringen existiert, in denen die Minimalbedingung von den Rechtsidealen erfüllt wird. Wir werden derartige Kriterien auf drei wesentlich verschiedenen Niveaus angeben: Im ersten Abschnitt werden wir die Existenz eines idempotenten Elements voraussetzen, das die Eins in R/N [N = Radikal von R im Sinne von PERLIS-JACOBSON] repräsentiert; im zweiten Abschnitt werden wir wenigstens die Existenz der Eins in R/N voraussetzen und im dritten Abschnitt werden wir keine derartigen Annahmen machen. Der vierte Abschnitt ist dann der Anwendung dieser Resultate auf Ringe mit einer interessanten Autodualitätseigenschaft gewidmet.

Verstehen wir unter einer Linkseins ein $ex = x$ für alle x in R erfüllendes Element e in R , so erweist es sich als zweckmäßig, Kriterien für die Existenz einer Linkseins anzugeben. Daß dies für unsere Zwecke ausreicht, folgt aus der einfachen und bekannten Bemerkung, daß im Ringe R dann und nur dann die Eins existiert, wenn R eine Linkseins, aber keine von Null verschiedenen Linksannullatoren besitzt.

1. Um das in diesem Abschnitt behandelte Problem auszusprechen, müssen wir zunächst an den Begriff des *Radikals eines Ringes* R [im Sinne von PERLIS-JACOBSON] erinnern. Dies ist ein zweiseitiges Ideal, das wir stets mit N bezeichnen werden. Ist r ein Element in N , so gibt es stets ein der Bedingung

$$s - r + rs = s - r + sr = 0$$

genügendes Element s in R ; und N ist das umfassendste Rechtsideal [wie auch das umfassendste Linksideal] mit dieser Eigenschaft. Wir erinnern weiter daran, daß das Radikal von R/N gleich Null ist, und daß N alle nilpotenten Ideale [sogar alle Nilideale] in R enthält.

Sei nun e eine *Linkseins* für R . Das bedeutet, daß $ex = x$ für jedes x in R gilt. Natürlich ist dann $e = e^2$ ein idempotentes Element

in R . Weiter ist $N + e$ eine Linkseins für R/N . Nun bilden aber die Linksannullatoren [wie auch die Rechtsannullatoren] des Rings R/N ein zweiseitiges Ideal, dessen Quadrat gleich Null ist, und das also selbst Null ist. Daraus folgt aber, daß in R/N die drei Begriffe: *Linkseins* [$ex = x$], *Rechtseins* [$xe = x$] und *Eins* [$ex = xe = x$] gleichbedeutend sind. Insbesondere repräsentiert also eine Linkseins von R im Ringe R/N das Einselement. In diesem Abschnitt wollen wir Kriterien dafür angeben, daß jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R auch Linkseins in R ist.

Wir stellen zunächst einige einfache, auf der PIERCESchen Zerlegung beruhende Formeln zusammen. Für diese benötigen wir den folgenden Begriff. Wenn a ein Element des Ringes R ist, so sei a_R die Gesamtheit der $ax = 0$ erfüllenden Elemente x in R ; und entsprechend ist a_L die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung $xa = 0$. Es ist klar, daß a_R ein Rechtsideal und a_L ein Linksideal in R ist.

Lemma 1. Wenn $e = e^2$ ein idempotentes Element in R ist, so gilt:

$$(1) \quad R = Re + e_L = eR + e_R, \quad 0 = ee_R = e_L e.$$

$$(2) \quad e_L R = e_L e_R = R e_R$$

ist ein zweiseitiges Ideal.

$$(3) \quad e_L^2 = R(e_L \cap e_R) = e_L(e_L \cap e_R), \quad e_R^2 = (e_R \cap e_L)R = (e_R \cap e_L)e_R.$$

$$(4) \quad R(e_L \cap e_R)R = e_L(e_L \cap e_R)e_R = e_L R e_R = e_L^2 e_R = e_L^2 R = R e_R^2 = e_L e_R^2.$$

Beweis. Da e idempotent ist, so ist e_L die Gesamtheit der Elemente der Form $x - xe$; und hieraus folgt sofort (1). Aus (1) folgt aber

$$e_L R = e_L(eR + e_R) = e_L e_R,$$

womit (2) bewiesen ist.

Sind x und y Elemente in e_L , so gilt $0 = xe = ye$; und es wird also $xy = x(y - ey)$. Da e_L ein Linksideal ist, so gehört mit y auch $y - ey$ zu e_L ; und es folgt aus $e = e^2$, daß $y - ey$ zu e_R gehört. Also gehört $y - ey$ zu $e_L \cap e_R$ und $xy = x(y - ey)$ gehört mithin zu $e_L(e_L \cap e_R)$. Hieraus und aus (1) folgt nun, daß

$$e_L^2 \leq e_L(e_L \cap e_R) = (Re + e_L)(e_L \cap e_R) = R(e_L \cap e_R) \leq e_L^2$$

gilt, woraus (3) folgt; und (4) folgern wir mühelos aus (2) und (3).

Die in Lemma 2 und 3 auftretenden Ringeigenschaften werden in dem Hauptsatz dieses Abschnitts eine Rolle spielen.

Lemma 2. Die folgenden beiden Eigenschaften des Ringes R sind miteinander äquivalent.

(i) $Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R .

(ii) Ist Z ein zweiseitiges Ideal in R und x ein $Rx \leq Z$ erfüllendes Element in R , so gehört x zu Z .

Bemerkung. Bedingung (ii) besagt, daß es keine von 0 verschiedenen Rechtsannihilatoren von R/Z gibt. Vgl. auch die Bemerkung zu Zusatz 2 weiter unten.

Beweis. Hat der Ring R die Eigenschaft (i), und ist Z ein zweiseitiges Ideal in R , so bezeichnen wir mit T die Gesamtheit der $Rx \leq Z$ erfüllenden Elemente x in R . Es ist klar, daß T ein Z enthaltendes zweiseitiges Ideal in R ist. Also folgt aus (i) und der Definition von T , daß

$$Z \leq T = RT \leq Z \text{ oder } Z = T$$

ist. Ist also $Rx \leq Z$, so gehört x zu $T = Z$, womit wir gezeigt haben, daß (ii) aus (i) folgt.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß der Ring R die Eigenschaft (ii) hat. Ist dann Z ein zweiseitiges Ideal in R , so ist $RZ = V$ ebenfalls ein zweiseitiges Ideal in R . Ist z in Z , so ist $Rz \leq V$ und es folgt aus (ii), daß z zu V gehört. Damit haben wir gezeigt, daß

$$Z \leq V = RZ \leq Z \text{ oder } Z = RZ$$

ist, und daß also auch (i) aus (ii) folgt.

Folgerung 1. Ist $Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R , so ist

$$(5) \quad (e_L e_R)^2 = e_L R e_R = e_L e_R$$

für jedes idempotente Element e in R .

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt insbesondere $R = R^2$. Ist e ein idempotentes Element in R , so ergibt sich also aus Lemma 1, (2)

$$(e_L e_R)^2 = e_L e_R e_L e_R = e_L R^2 e_R = e_L R e_R.$$

Weiter folgern wir aus $R e_R = e_L e_R$, unserer Voraussetzung und Lemma 2, daß e_R in dem zweiseitigen Ideal $e_L e_R$ enthalten ist. Hieraus schließen wir, daß

$$e_L e_R \leq e_L (e_L e_R) \leq e_L e_R \text{ oder } e_L e_R = e_L^2 e_R = e_L R e_R$$

ist, womit der Beweis von (5) erbracht ist.

Lemma 3. Die folgenden beiden Eigenschaften des Ringes R sind miteinander äquivalent.

(i) Jedes von R verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal enthalten und das Radikal N ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale.

(ii) Jedes von R/N verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal [in R/N] enthalten und das einzige $N + J = R$ erfüllende Rechtsideal J in R ist $J = R$.

Beweis. Nehmen wir zunächst die Gültigkeit von (i) an. Ist U ein von R/N verschiedenes Rechtsideal in R/N , so gibt es ein N enthaltendes und $U = V/N$ erfüllendes Rechtsideal V in R . Natürlich ist $V \neq R$ und es gibt also ein maximales Rechtsideal M in R , das V enthält. Dann ist $N \leq V \leq M$ und M/N ist ein maximales Rechtsideal in R/N , das U enthält. Ist weiter J ein Rechtsideal in R , das $R = N + J$

erfüllt, und ist $J < R$, dann gibt es [wegen (i)] ein maximales Rechtsideal M in R , das J enthält. Dann ist [wegen (i)] $N \leq M$ und folglich wird

$$R = N + J \leq N + M = M < R,$$

was unmöglich ist. Also ist $J = R$, womit gezeigt ist, daß (ii) aus (i) folgt.

Wir nehmen nun umgekehrt die Gültigkeit von (ii) an. Es ist unmöglich, daß $R = N$ ist, da sonst aus $R = N + 0$ folgen würde, daß $0 = R$ ist, in welchem trivialen Falle alles stimmt. Dann ist aber bekannt, daß N Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Rechtsideale von R ist; siehe etwa JACOBSON [1; p. 311, Theorem 18] oder KAPLANSKY [1; p. 692, Lemma 1]. Ist nun M ein maximales Rechtsideal in R , das N nicht enthält, so wird natürlich $M < M + N$ und also $M + N = R$, woraus [wegen (ii)] $M = R$ folgt, was unmöglich ist. Also ist N in jedem maximalen Rechtsideal enthalten, so daß N der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale ist. Ist weiter U ein von R verschiedenes Rechtsideal, so folgt zunächst aus dem zweiten Teil der Bedingung (ii), daß $N + U < R$ ist. Also ist $(N + U)/N$ ein von R/N verschiedenes Rechtsideal; und wir folgern aus dem ersten Teil der Bedingung (ii) die Existenz eines maximalen Rechtsideals W in R/N , das $(N + U)/N$ enthält. Dann ist aber $W = V/N$ und V ist ein maximales Rechtsideal in R , das $N + U$ und also auch U enthält. Mithin ist (i) eine Folge von (ii).

Hilfssatz 1. *Gehört x zu Nx [oder zu xN], so ist $x = 0$.*

Beweis. Gehört etwa x zu Nx , so gibt es ein $x = nx$ erfüllendes Element n in N . Aus der Definition des Radikals folgt dann die Existenz eines Elements m in R , das der Gleichung $n = m - mn$ genügt. Dann wird aber

$$x = nx = (m - mn)x = mx - m(nx) = mx - mx = 0,$$

wie wir beweisen wollten.

Satz 1. *Gibt es in dem Ringe R idempotente Elemente, die die Eins in R/N repräsentieren, so sind die folgenden Eigenschaften von R untereinander äquivalent.*

(i) *Jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R ist Linkseins in R .*

(ii) *Es existiert eine Linkseins in R .*

(iii) *x gehört zu Rx [für jedes x in R].*

(iv) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$.*

(v) *$Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R ; und ein Element x , das zu NxN gehört, gehört auch zu Rx oder zu xR .*

(vi) *Jedes von R verschiedene Rechtsideal ist in einem maximalen Rechtsideal enthalten und das Radikal N ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale.*

(vii) *Wenn J ein $N + J = R$ erfüllendes Rechtsideal in R ist, so ist $J = R$.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) [und der allgemeinen Voraussetzung unseres Satzes] folgt; und es ist ebenfalls klar, daß (iii) eine Folge von (ii) ist. Aus (iii) und Hilfssatz 1 folgt sofort (iv). Gilt (iv) und ist e ein idempotentes Element, das eine Eins in R/N repräsentiert, so betrachten wir ein Element x in e_R . Dann ist

$$Rx = [Re + e_L]x = e_Lx.$$

Da aber $N + e$ das Einselement in R/N ist, so ist e_L in N enthalten, so daß

$$Rx = e_Lx \leq Nx \leq Rx \text{ oder } Rx = Nx$$

wird. Aus (iv) folgern wir nun $x = 0$, so daß also $e_R = 0$ ist. Ist nun r irgendein Element in R , so gehört $r - er$ wegen der Idempotenz von e zu e_R . Also wird $r - er = 0$ oder $r = er$, so daß e eine Links-eins von R ist. Damit haben wir gezeigt, daß (i) aus (iv) folgt und daß also die Bedingungen (i) bis (iv) untereinander äquivalent sind.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv), so gilt auch (v) [etwa als Folge von (ii)]. Gilt umgekehrt (v) in R , so betrachten wir ein idempotentes Element e in R , das die Eins in R/N repräsentiert. Ist zunächst x irgendein Element in R , so bilden wir das zweiseitige Ideal $T = Rx + RxR$. Aus $Rx \leq T$, Bedingung (v) und Lemma 2 folgt nun, daß x zu T gehört. Also gilt:

$$(v. a) \quad x \text{ gehört zu } Rx + RxR.$$

Da $e = e^2$ die Eins in R/N repräsentiert, so sind e_R und e_L in N enthalten. Ist x insbesondere ein Element in e_R , so erhalten wir wie üblich

$$Rx = (Re + e_L)x = e_Lx \leq Nx \leq Rx \text{ oder } Rx = Nx.$$

Nun folgt aus (v. a), daß das Element $x^* = RxR + x$ in $R/RxR = R^*$ zu R^*x^* gehört; und aus $Rx = Nx$ folgt, daß $R^*x^* = N^*x^*$ ist, wo N^* das Radikal von R^* ist. Dann folgt aber aus Hilfssatz 1, daß das Element x^* in N^*x^* gleich Null ist; und damit haben wir folgendes gezeigt:

$$(v. b) \quad \text{Gehört } x \text{ zu } e_R, \text{ so gehört } x \text{ zu } RxR.$$

Sei nun insbesondere x ein Element in dem Durchschnitt $e_R \cap e_L$. Dann folgt aus (v. b) [und Lemma 1, (1)], daß x zu

$$RxR = (Re + e_L)x(eR + e_R) = e_Lxe_R \leq NxN$$

gehört. Wenden wir nun Bedingung (v) an, so folgt, daß x zu

$$Rx = e_Lx \leq Nx \text{ oder } xR = xe_R \leq xN$$

gehört; und in beiden Fällen folgt $x = 0$ aus Hilfssatz 1. Damit haben wir gezeigt, daß

$$(v. c) \quad e_R \cap e_L = 0$$

ist. Aus Bedingung (v) folgt Anwendbarkeit der Folgerung 1, (5). Also folgt aus (v.e) und Lemma 1, (3), (4), daß

$$R e_R = e_L e_R = e_L R e_R = R (e_L \wedge e_R) R = 0$$

ist. Wegen (v) gilt aber Bedingung (ii) von Lemma 2. Also ist $e_R = 0$. Ist nun r ein Element in R , so folgt aus $e = e^2$, daß $r - er$ zu e_R gehört und also gleich 0 ist. Mithin ist $r = er$, e eine Linkseins von R und (i) eine Folge von (v), womit die Äquivalenz der ersten fünf Bedingungen erwiesen ist.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i) bis (v), so existiert eine Linkseins e in R . Ist J ein von R verschiedenes Rechtsideal in R , so ist e nicht in J enthalten, da ja $eR = R$ ist. Also gibt es ein maximales, J enthaltendes und e nicht enthaltendes Rechtsideal J' in R . Ist J'' ein Rechtsideal in R , und ist $J' < J''$, so enthält J'' das Element e [da ja J in J' und also in J'' enthalten ist]. Also wird $J'' = eR = R$, so daß J' ein maximales Rechtsideal ist. Damit ist die Existenz eines maximalen Rechtsideals erwiesen, daß J enthält. Ist weiter D der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale in R , so folgt aus einem Satz von JACOBSON [1, p. 311, Theorem 18], daß

$$N = RN \leq D \leq N \text{ oder } D = N$$

ist. Also folgt (vi) aus (i) bis (v).

Daß (vii) aus (vi) folgt, ist in Lemma 3 enthalten. Gilt schließlich Bedingung (vii), so betrachten wir ein idempotentes Element e in R , das die Eins in R/N repräsentiert. Dann ist eR ein Rechtsideal und e_R in N enthalten, so daß

$$R = eR + e_R = N + eR$$

ist. Dann folgt aber $R = eR$ aus Bedingung (vii); und hieraus folgt ohne weiteres, daß e Linkseins von R ist [wegen $e(e y) = e^2 y = e y$]. Also ist (i) eine Folge von (vii); und damit haben wir die Äquivalenz aller Bedingungen (i) bis (vii) erwiesen.

Bemerkung. In Bedingung (v) des vorstehenden Satzes werden Elemente x mit der Eigenschaft

$$(*) \quad x \text{ gehört zu } N x N$$

betrachtet. Natürlich hat 0 diese Eigenschaft (*); und es scheint eine offene Frage zu sein, ob es von 0 verschiedene Elemente mit der Eigenschaft (*) geben kann. Ist insbesondere R kommutativ, so folgt natürlich aus Hilfssatz 1, daß 0 das einzige Element x in R derart ist, daß x zu $N x N = x N^2$ gehört. Ist 0 das einzige Element mit der Eigenschaft (*), so kann man die zweite Hälfte der Bedingung (v) fortlassen. In diesem Zusammenhang scheint das folgende Kriterium nicht ohne Interesse zu sein.

Zusatz 1. Ist $Z = RZ$ für jedes zweiseitige Ideal Z in R , ist 0 das einzige $W^2 = W \leq N$ erfüllende zweiseitige Ideal W in R , so ist

jedes die Eins in R/N repräsentierende idempotente Element in R Linkseins von R .

Beweis. Sei $e = e^2$ ein die Eins in R/N repräsentierendes idempotentes Element in R . Dann sind e_L und e_R in N enthalten. Wegen der ersten Voraussetzung können wir Folgerung 1 auf das zweiseitige Ideal $W = e_L e_R$ anwenden. Es gilt also $W^2 = W \leq N$; und nun folgt $W = 0$ aus unserer zweiten Annahme. Es folgt dann aber aus Lemma 1, daß $0 = W = e_L e_R = R e_R$ ist. Aus der ersten Annahme und Lemma 2 folgt dann aber $e_R = 0$, woraus, wie üblich, folgt, daß das idempotente Element e Linkseins in R ist.

Bemerkung. Die zweite Bedingung von Zusatz 1 ist nicht notwendig, wie man leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß KÖTHE [1] ein Beispiel eines kommutativen Ringes K angegeben hat, der $K = K^2 = N$ erfüllt, und daß natürlich dieser Ring Radikal eines kommutativen Ringes mit Eins ist. Andererseits ist die zweite Bedingung des Zusatz 1 nicht selten erfüllt. Z. B. hat JACOBSON [1; p. 306, Theorem 11] gezeigt, daß aus der Maximalbedingung für Rechtsideale eine viel schärfere Bedingung folgt.

2. Im vorigen Abschnitt haben wir i. a. die Existenz eines idempotenten Elements, das die Eins in R/N repräsentiert, vorausgesetzt. Wir werden jetzt nur noch annehmen, daß R/N eine Eins besitzt.

Satz 2. Wenn in R/N die Eins existiert, so sind die folgenden Eigenschaften von R äquivalent:

- (i) In R existiert eine Linkseins.
- (ii) x gehört stets zu Rx ; und R ist das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R .
- (iii) x gehört stets zu Rx ; und y gehört zu yR , wenn $R = N + yR$ ist.
- (iv) Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; und y gehört zu yR , wenn $R = N + yR$ ist.
- (v) x ist ein Nilelement [$x^2 = 0$], wenn $Rx = Nx$ ist; und R ist das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R .

Beweis. Man erschließt ohne Mühe aus Satz 1, daß (ii) eine Folge von (i) ist. Ist R das einzige $R = N + J$ erfüllende Rechtsideal J in R , so folgt natürlich aus $R = N + yR$, daß y zu yR gehört. Gehört x stets zu Rx , so folgt aus Hilfssatz 1, daß 0 das einzige $Rx = Nx$ erfüllende Element x in R ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, daß (iii) eine Folge von (ii) und (iv) eine Folge von (iii) ist.

Wir nehmen nun die Gültigkeit von (iv) an. Da in R/N die Eins existiert, so können wir diese in der Form $N + a$ darstellen. Da dann aber $R/N = (N + a)(R/N)$ ist, so wird auch $R = N + aR$. Nun folgern wir aus dem zweiten Teil der Bedingung (iv), daß a zu aR gehört, und daß es also ein $a = ab$ erfüllendes Element b in R gibt. Dann ist auch $a = ab^2$ und hieraus folgt

$$a(b - b^2) = 0.$$

Da a die Eins in R/N repräsentiert, so wird

$$a = ab \equiv b \text{ modulo } N,$$

so daß also auch b die Eins in R/N repräsentiert. Weiter ist $R = N + Ra$ eine Folge davon, daß $N + a$ die Eins in R/N ist. Mithin wird

$$R(b - b^2) = (N + Ra)(b - b^2) = N(b - b^2);$$

und es folgt aus dem ersten Teil der Bedingung (iv), daß $b - b^2 = 0$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß b ein die Eins in R/N repräsentierendes idempotentes Element ist. Der erste Teil der Bedingung (iv) ist aber mit Bedingung (iv) von Satz 1 identisch; und nun folgt aus Satz 1, daß b eine Linkseins von R ist. Also ist (i) eine Folge von (iv), womit die Äquivalenz der ersten vier Bedingungen erwiesen ist.

Die erste Hälfte der Bedingung (v) ist eine triviale Folge aus der ersten Hälfte der Bedingung (iv); und die zweite Hälfte der Bedingung (v) ist mit der zweiten Hälfte der Bedingung (ii) identisch. Also folgt (v) aus den äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv).

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (v) an. Dann zeigen wir zunächst:

(v. a) Es gibt ein die Eins in R/N repräsentierendes Element e in R derart, daß $e - e^2$ ein Nilelement ist.

Sei wieder a irgendein die Eins repräsentierendes Element in R . Dann ist, wie vorher, $R = N + aR$. Also folgt $aR = R$ aus (v), woraus wir die Existenz eines $a = ae$ erfüllenden Elements e in R folgern. Wie oben sehen wir zunächst ein, daß auch e die Eins in R/N repräsentiert, daß $a(e - e^2) = 0$ ist, und daß $R(e - e^2) = N(e - e^2)$ ist. Schließlich folgt nun aus (v), daß $e - e^2$ ein Nilelement ist.

Weiter zeigen wir — unabhängig von der Gültigkeit der Bedingung (v) — die Gültigkeit der folgenden Tatsache:

(v. b) Gibt es in R ein die Eins in R/N repräsentierendes Element r derart, daß $r - r^2$ ein Nilelement ist, so gibt es auch ein die Eins in R/N repräsentierendes, idempotentes Element in R .

Nennen wir nämlich Exponent des Nilelements w die kleinste positive, $w^n = 0$ erfüllende Zahl n , so können wir aus der Voraussetzung von (v. b) die Existenz eines Elements e mit folgenden Eigenschaften erschließen:

(1) $N + e$ ist die Eins in R/N .

(2) $e - e^2$ ist ein Nilelement.

(3) Der Exponent des Nilelements $e - e^2$ ist minimal.

Dann bilden wir [nach DICKSON-KÖTHE] das Element $f = e - 2ec + c$, wo $c = e^2 - e$ ist. Da $N + e$ die Eins in R/N ist, so gehört c zu N , so daß auch f die Eins in R/N repräsentiert. Da e und c vertauschbar sind, so wird $f^2 - f = 4c^3 - 3c^2$; und der Exponent dieses Nilelements wäre kleiner als der von $e^2 - e$, wenn $e^2 - e \neq 0$ wäre. Daraus folgt $e = e^2$ wegen (3), womit der Beweis von (v. b) erbracht ist.

Aus (v.a) und (v.b) zusammen folgt nun die Existenz eines die Eins in R/N repräsentierenden, idempotenten Elements in R . Da aber der zweite Teil der Bedingung (v) mit der Bedingung (vii) des Satzes 1 identisch ist, so folgt aus Satz 1 die Existenz einer Linkseins in R . Also folgt (i) aus (v), womit der Beweis der Äquivalenz unserer fünf Eigenschaften erbracht ist.

Bemerkung. Da es im Ringe R/N keine von 0 verschiedenen Rechtsannulatoren dieses Ringes gibt, so folgt aus $Rx = Nx$ stets, daß x zu N gehört. Der erste Teil der Bedingung (v) ist also sicher dann erfüllt, wenn N ein Nilideal ist.

Um diese Bemerkung auszubenten, definieren wir die folgenden beiden aufsteigenden Ketten zweiseitiger Ideale N_σ und ${}_oN$.

$$N_0 = {}_oN = 0.$$

$N_{\sigma+1}$ ist die Gesamtheit der $\{xN \subseteq N_\sigma\}$
 ${}_{\sigma+1}N$ } erfüllenden Elemente x in R .
 $\{Nx \subseteq {}_\sigma N\}$

Ist σ eine Limeszahl, so ist $\{N_\sigma\}$ die Vereinigungsmenge aller $\{N_\nu\}$
 $\{{}_oN\}$ mit $\nu < \sigma$.

Natürlich ist $N_\alpha = N_{\alpha+1} = \dots$ und ${}_\beta N = {}_{\beta+1}N = \dots$ für hinreichend großes [endliches oder unendliches] α bzw. β . Wir werden uns besonders mit Ringen beschäftigen, wo wenigstens eine dieser Ketten mit R endigt. Daß dies in vielen interessanten Fällen geschieht, geht aus der leicht verifizierbaren Äquivalenz der folgenden drei Eigenschaften eines Ringes R hervor: (i) $N_k = R$ für endliches k ; (ii) ${}_hN = R$ für endliches h ; (iii) $N^m = 0$ für endliches m .

Hilfssatz 2: Ist $R = N_\alpha$ oder $R = {}_\beta N$, so ist N ein Nilideal.

Beweis: Wir beweisen induktiv, daß jedes $N \cap N_\sigma$ ein Nilideal ist. Dies ist sicherlich für $\sigma = 0$ der Fall. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ und daß $N \cap N_\nu$ mit $\nu < \sigma$ ein Nilideal ist. Ist dann zunächst σ eine Limeszahl, so ist $N \cap N_\sigma$ die Vereinigungsmenge aller $N \cap N_\nu$ mit $\nu < \sigma$ und also ein Nilideal. Ist weiter $\sigma = \varrho + 1$ und x ein Element in $N \cap N_\sigma$, so ist x^2 als Element in $N_{\varrho+1}N \subseteq N_\varrho$ ein Nilelement, so daß x selber ein Nilelement ist. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Ist $N_\alpha = R$, so ist $N = N \cap N_\alpha$ ein Nilideal. Die zweite Behauptung folgt nun aus Symmetriegründen.

Folgerung 2: Es existiert eine Linkseins in R , wenn

- (a) die Eins in R/N existiert,
- (b) ${}_oN = R$ für jedes σ gilt und
- (c) $R = {}_\beta N$ für hinreichend großes β ist.

Beweis: Es folgt aus (c) und Hilfssatz 2, daß N ein Nilideal ist. Folglich gilt der erste Teil der Bedingung (v) des Satzes 2, wie wir in der Bemerkung zu Satz 2 ausgeführt haben.

Weiter sei J ein Rechtsideal in R derart, daß $R = N + J$ ist. Wir werden induktiv zeigen, daß jedes ${}_oN \subseteq J$ ist. Dies ist sicher wahr, wenn $\sigma = 0$ ist. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ ist und daß J jedes

${}_vN$ mit $v < \sigma$ enthält. Ist σ zunächst Limeszahl, so enthält J auch die Vereinigungsmenge ${}_oN$ all dieser ${}_vN$ mit $v < \sigma$. Ist aber $\sigma = \varrho + 1$, so ist wegen (b) und Induktionsannahme

$${}_oN = R {}_oN = [N + J] {}_oN = N {}_{\varrho+1}N + J {}_oN \leq {}_{\varrho}N + J \leq J.$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig erbracht. Insbesondere ist also $R = {}_3N$ in J enthalten, so daß $J = R$ aus $R = N + J$ folgt. Damit ist auch die zweite Hälfte der Bedingung (v) des Satzes 2 verifiziert. Da aber wegen (a) die Eins in R/N existiert, so folgt schließlich aus Satz 2 die Existenz einer Linkseins in R .

Bemerkung: Bedingungen (a) und (b) sind notwendig für die Existenz einer Linkseins, Bedingung (c) aber nicht.

Zusatz 2: *Es existiert eine Linkseins in R , wenn*

- (a) *die Eins in R/N existiert,*
- (b) *$x = 0$ aus $Rx = 0$ folgt,*
- (c) *$N_\sigma x = 0$ aus $N_\sigma Rx = 0$ folgt und*
- (d) *$R = N_\beta$ für hinreichend großes β ist.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die folgende Eigenschaft:

- (e) *Ist $N + w$ die Eins in R/N , so ist $w_R = 0$.*

Sei etwa x ein $ux = 0$ erfüllendes Element in R . Dann beweisen wir induktiv, daß $N_\sigma x = 0$ ist. Dies ist sicher wahr, wenn $\sigma = 0$ ist. Wir nehmen also an, daß $0 < \sigma$ und $N_\nu x = 0$ für jedes $\nu < \sigma$ gilt. Ist zunächst σ eine Limeszahl, so ist N_σ die Vereinigungsmenge aller N_ν mit $\nu < \sigma$, so daß auch $N_\sigma x = 0$ ist. Sei weiter $\sigma = \varrho + 1$. Da $N + w$ die Eins in R/N ist, so ist $R = N + Rw$. Also wird

$$N_\sigma Rx = N_\sigma [N + Rw] x = N_{\varrho+1} Nx \leq N_\varrho x = 0,$$

da ja $ux = 0$ ist. Wir wenden (c) an und sehen, daß auch $N_\sigma x = 0$ ist. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig erbracht. Also ist insbesondere $Rx = N_\beta x = 0$ [wegen (d)]; und nun folgt $x = 0$ aus (b). Damit ist (e) bewiesen.

Es folgt aus Hilfssatz 2, daß N ein Nilideal ist. Repräsentiert also r die Eins in R/N — und solche Elemente existieren wegen (a) — so ist $r - r^2$ als Element in N auch Nilelement. Nun können wir aber den während des Beweises des Satzes 2 bewiesenen Hilfssatz (v.b) anwenden. Also existiert ein die Eins in R/N repräsentierendes, idempotentes Element a in R . Aus (e) folgern wir dann, daß $a_R = 0$ ist; und hieraus folgt wie üblich, daß a Linkseins von R ist.

Bemerkung. Die Bedingungen (a), (b), (c) sind notwendig für die Existenz einer Linkseins, während (d) es nicht ist. Wir wollen noch zeigen, daß die Bedingungen (b), (c) [und mehr] aus der Bedingung

$$(+)\quad Z = RZ \text{ für jedes zweiseitige Ideal } Z$$

folgt. Daß (b) aus (+) folgt, ist in Lemma 2 enthalten. Sei nun T irgendein zweiseitiges Ideal und T^* die Gesamtheit der $Tx = 0$ er-

füllenden Elemente x in R . Dann ist auch T^* ein zweiseitiges Ideal. Ist nun $TRx = 0$, so ist $Rx \leq T^*$; und es folgt aus (+) und Lemma 2, daß x zu T^* gehört. Damit haben wir gezeigt:

Aus (+) folgen die folgenden beiden Eigenschaften von R .

Aus $Rx = 0$ folgt $x = 0$; und aus $ZRx = 0$ folgt $Zx = 0$, wenn Z ein zweiseitiges Ideal in R ist.

Zusatz 3. *Wenn in R/N die Eins existiert, so sind die folgenden Eigenschaften von R untereinander äquivalent.*

(i) *In R existiert die Eins.*

(ii) *x gehört stets zu $Rx \cap xR$.*

(iii) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; und y gehört stets zu yR .*

(iv) *Aus $Rx = Nx$ folgt $x = 0$; aus $yR = 0$ folgt $y = 0$; und z gehört zu zR , wenn $R = N + zR$ ist.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt. Daß (iii) aus (ii) folgt, ergibt sich unter Benutzung von Hilfssatz 1; und es ist klar, daß (iv) aus (iii) folgt. Gilt schließlich (iv), so ergibt sich aus Satz 2 die Existenz einer Linkseins in R ; und diese ist notwendig die Eins in R , da ja $x = 0$ aus $xR = 0$ folgt. Damit ist die Äquivalenz von (i) bis (iv) erwiesen.

Bemerkung. Die Bedingungen (i) und (ii) bleiben unverändert, wenn man links und rechts vertauscht. Also ergeben sich durch diese Vertauschung aus (iii) und (iv) zwei weitere äquivalente Eigenschaften.

3. Im gegenwärtigen Abschnitt werden wir ein Existenzkriterium herleiten, in dem die Existenz einer Eins in R/N nicht vorausgesetzt wird.

Satz 3. *Dann und nur dann existiert eine Linkseins in R , wenn*

(a) *$R = aR$ für wenigstens ein a in R gilt und*

(b) *x zu Rx gehört, wenn $R = xR$ ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser beiden Bedingungen (a) und (b) ist trivial. Wir nehmen also an, daß die Bedingungen (a) und (b) in R gelten. Dann gibt es ein Element a in R derart, daß $R = aR$ ist. Weiter folgt aus (b), daß a zu Ra gehört. Also gibt es ein $a = ea$ erfüllendes Element e in R . Dann ist auch $a = e^2a$, woraus wir $(e - e^2)a = 0$ und

$$(e - e^2)R = (e - e^2)aR = 0$$

erschließen. Folglich wird

$$e^2 - e^4 = (e - e^2)(e + e^2) \leq (e - e^2)R = 0$$

oder

$$e^2 = (e^2)^2.$$

Weiter ist

$$R = aR = e^2aR = e^2R.$$

Also ist e^2 ein idempotentes Element, das $R = e^2R$ erfüllt, woraus sofort folgt, daß e^2 eine Linkseins von R ist.

4. Wir wollen in diesem Abschnitt als Anwendung von Zusatz 3 einen Existenzsatz von M. HALL [1; p. 362, Theorem 3.2] verallgemeinern. Diesem Satz müssen wir einige Betrachtungen über eine spezielle Klasse von Ringen vorausschicken, die auch unabhängig von ihrer Anwendung von Interesse sind.

Ist A eine Teilmenge des Ringes R , so bezeichnen wir mit A_R die Gesamtheit der $Ax = 0$ erfüllenden Elemente x in R ; und unter A_L verstehen wir entsprechend die Gesamtheit der $xA = 0$ erfüllenden Elemente. Es ist klar, daß A_R ein Rechtsideal und A_L ein Linksideal ist. Diese Operationen sind durch eine Reihe einfacher Beziehungen miteinander verknüpft, von denen wir aber nur

$$AA_R = 0 = A_L A$$

erwähnen.

Der Ring $R [\neq 0]$ werde nun *autodual* genannt, wenn

$J = J_{LR}$ für jedes Rechtsideal J in R und

$Q = Q_{RL}$ für jedes Linksideal Q in R gilt.

Der Name „autodual“ erklärt sich daraus, daß in autodualen Ringen die Abbildungen

$J \rightarrow J_L$ für Rechtsideale J und $Q \rightarrow Q_R$ für Linksideale Q

zueinander reziproke Dualitäten zwischen dem Verband der Rechtsideale und dem Verband der Linksideale in R herstellen [Dualitäten sind eindeutige und monoton abnehmende Verbandsabbildungen]. — Auto-duale Ringe sind vielfach untersucht worden; wir weisen nur auf die Arbeiten von BAER, HALL, KAPLANSKY und NAKAYAMA hin.

Lemma 4. Der autoduale Ring R hat die folgenden Eigenschaften.

(a) $(aR)_L = a_L$, $(Ra)_R = a_R$.

(b) a gehört zu $aR \cap Ra$.

(c) $R \neq N$.

(d) $N_R = N_L = S$ ist die Summe aller minimalen Rechtsideale und ist auch die Summe aller minimalen Linksideale.

(e) N ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale und auch der Durchschnitt aller maximalen Linksideale.

(f) $a \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R$.

(g) Das Rechtsideal J hat dann und nur dann die Eigenschaft $J = aJ$, wenn das Linksideal J_L der folgenden Bedingung genügt:

x gehört dann und nur dann zu J_L , wenn xa zu J_L gehört.

(h) Sind J und J' Rechtsideale mit den Eigenschaften: $J = aJ$ und x gehört dann und nur dann zu J' , wenn ax zu J' gehört, so sind $V = J \cap J'$ und $V' = J + J'$ Rechtsideale mit den Eigenschaften: $V = aV$ und x gehört dann und nur dann zu V' , wenn ax zu V' gehört.

(j) Dann und nur dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \cap \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i \right]_R = 0,$$

wenn $\bigcap_{i=1}^n R a^i = R a^n$ für hinreichend großes n gilt.

(k) Das Radikalelement r erfüllt dann und nur dann $r^n = 0$, wenn

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} R r^i = R r^n \text{ ist.}$$

Vorbemerkung. Da die Autodualitätsvoraussetzung gleichmäßig für Rechts- und Linksideale gilt, so gilt jede für Rechtsideale in autodualen Ringen gültige Aussage mutatis mutandis auch für Linksideale. Wir haben infolgedessen oft nur eine dieser beiden Aussagen aufgeführt und werden immer nur eine dieser beiden Aussagen beweisen.

Beweis. Aus $0 = 0_{RL} = R_L$ folgt sofort, daß

$$x = 0 \text{ eine Folge von } xR = 0$$

ist. Also gehört x dann und nur dann zu $(aR)_L$, wenn $(xa)R = 0$ und also auch $xa = 0$ ist, woraus (a) folgt. Aus (a) erschließen wir weiter, daß a zu $a_{LR} = (aR)_{LR} = aR$ gehört. Also gilt (b). Aus (b) und Hilfsatz 1 folgt (c).

Da $N < R$ ist, so gibt es maximale Rechtsideale und maximale Linksideale und N ist der Durchschnitt aller N enthaltenden maximalen Rechtsideale [Linksideale]; siehe JACOBSON [1; p. 310/311]. Durch Dualisierung folgt dann die Existenz minimaler Rechtsideale und minimaler Linksideale. Die Summe aller minimalen Linksideale werde mit S bezeichnet und die Summe aller minimalen Rechtsideale bezeichnen wir mit S_r . Durch Dualisierung der Durchschnittsdarstellungen von N folgt weiter, daß

$$N_{L_c} \leq S \text{ und } N_R \leq S_r$$

ist. Ist J ein minimales Rechtsideal, so ist bekanntlich $JN = 0$; siehe etwa BAER [2; p. 565, Theorem 10.11]. Also wird $S_r N = 0$ oder $S_r \leq N_L$ und $S \leq N_R$ sieht man ebenso ein. Folglich gilt

$$S \leq N_R \leq S_r \leq N_L \leq S,$$

woraus die Gleichheit dieser vier Ideale und also (d) folgt. (e) folgt aus (d) durch Dualisierung.

Sei a ein Element in R und $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R$. Dann ist D_L die Vereinigungsmenge der aufsteigenden Folge von Linksidealien $(a^i R)_L = (a^i)_L$

[wegen (a)]. Weiter gehört x dann und nur dann zu $(aD)_L$, wenn $xaD = 0$ ist und xa zu D_L gehört. Es gehört aber, wie gerade bemerkt, xa dann und nur dann zu D_L , wenn xa zu einem $(a^k)_L$ gehört. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $xa^{k+1} = 0$ ist, d. h.

wenn x zu $(a^{k+1})_L \leq D_L$ gehört. Also gehört x dann und nur dann zu $(aD)_L$, wenn es zu D_L gehört. Mithin ist $(aD)_L = D_L$ und $aD = D$, womit (f) bewiesen ist.

Sei J ein Rechtsideal und a ein Element in R . Ist $J = aJ$, so gehört x dann und nur dann zu J_L , wenn $0 = xJ = xaJ$ ist, d. h. wenn xa zu J_L gehört. Gehört umgekehrt x dann und nur dann zu J_L , wenn xa zu J_L gehört, so ist $J_L = (aJ)_L$ und also $J = aJ$. Mithin gilt (g).

Sei weiter a ein Element in R , J und J' Rechtsideale mit den folgenden Eigenschaften: $J = aJ$ und x gehört dann und nur dann zu J' , wenn ax zu J' gehört. Wir bilden $V = J \wedge J'$. Dann ist

$$aV \leq aJ \wedge aJ' = J \wedge aJ' \leq J \wedge J' = V.$$

Ist weiter v ein Element in V , so gehört v zu $J = aJ$. Es gibt also ein Element j in J derart, daß $v = aj$ ist. Da aber $v = aj$ zu J' gehört, so gehört auch j zu J' . Mithin gehört j zu $J \wedge J' = V$, so daß v zu aV gehört. Also ist $V \leq aV \leq V$ oder $V = aV$. — Wir setzen weiter $V' = J + J'$. Dann ist $V'_L = J_L \wedge J'_L$ wegen der Dualitätseigenschaften der L -Operation. Es folgt aus unseren Annahmen über J und J' und aus (g), daß $J'_L = J'_L a$ ist, und daß xa dann und nur dann zu J_L gehört, wenn x zu J_L gehört. Aus dem bereits bewiesenen folgt nun $V'_L = V'_L a$ und hieraus folgt wegen (g), daß x dann und nur dann zu V' gehört, wenn ax zu V' gehört. Damit ist der Beweis von (h) erbracht.

Wir betrachten nun ein Element a mit der Eigenschaft:

$$0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \wedge \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i \right]_R.$$

Dann ist $R = \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \right]_L + \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i \right]$. Da a selbst zu R gehört, so existieren Elemente x und y in $\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \right]_L$ resp. $\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$ derart, daß $a = x + y$ ist. Dann erschließen wir zunächst, daß x einem der $[a^i R]_L = [a^i]_L$ angehört, so daß also $xa^k = 0$ für geeignetes k . Es folgt nun aus (f), daß $a^{k+1} = ya^k$ zu $\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i \right] a^k = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$ gehört. Hieraus folgt aber sofort $R a^{k+1} = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i$.

Sei nun umgekehrt a ein Element mit der Eigenschaft

$$R a^m = \bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i.$$

Sei weiter

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R \wedge \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i \right]_R.$$

Dann folgt aus (f), (g), (h), daß $aD = D$ ist. Aus unserer Voraussetzung folgt aber, daß

$$[\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i]_R = [R a^m]_R = [a^m]_R$$

ist. Folglich wird

$$D = a^m D \subseteq a^m [a^m]_R = 0,$$

womit (j) vollständig bewiesen ist.

Ist schließlich r ein Element in N , das der Bedingung

$$R r^n = \bigcap_{i=1}^{\infty} R r^i$$

genügt, so gehört r^n zu $R r^{n+1}$. Also existiert ein Element x in R , so daß $r^n = x r^{n+1}$. Da aber $x r$ zum Radikal N gehört, so gibt es ein der Bedingung $x r = t - t x r$ genügendes Element t in R ; und es wird

$$r^n = x r^{n+1} = (t - t x r) r^n = t r^n - t (x r^{n+1}) = t r^n - t r^n = 0.$$

Hieraus folgt (k).

Folgerung 3. Die folgenden Eigenschaften des autodualen Ringes R sind untereinander äquivalent.

(i) *Das Radikal N ist ein Nilideal.*

(ii) *Ist a ein Element in N und J ein $J = aJ$ erfüllendes Rechtsideal, so ist $J = 0$.*

(iii) *Ist a ein Element in N , sind J und J' Rechtsideale mit den Eigenschaften $J = aJ$ und x gehört dann und nur dann zu J' , wenn $a x$ zu J' gehört, so ist $J \cap J' = 0$.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) und (iii) aus (ii) folgt. Nehmen wir schließlich an, daß Bedingung (iii) gilt und daß a ein Element in N ist. Wir setzen $J = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i R$ und $J' = [\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i]_R$. Dann folgt aus Lemma 4, (f) und (g), daß $aJ = J$ ist und daß x dann und nur dann zu J' gehört, wenn $a x$ zu J' gehört. Es folgt also aus (iii), daß $J \cap J' = 0$ ist; und nun folgt aus Lemma 4, (j), daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} R a^i = R a^n$ für hinreichend großes n gilt; und aus Lemma 4, (k) folgt dann schließlich $a^n = 0$, da ja a zu N gehört. Also folgt (i) aus (iii) und die Äquivalenz der Bedingungen (i) bis (iii) ist erwiesen.

Beispiel eines autodualen Ringes, dessen Radikal kein Nilideal ist. Es sei K ein kommutativer Körper, A eine ABELSche Gruppe mit Operatoren aus K , die eine abzählbare Basis $a(1), a(2), \dots, a(i), \dots$ besitzt. Weiter sei $P = K[t]$ der Integritätsbereich aller formalen Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} k_i t^i$ mit Koeffizienten aus K . Die Additionsgruppe des zu konstruierenden Ringes R sei einfach die direkte Summe der Additionsgruppen von A und P . Die Multiplikation in R werde durch die folgenden Regeln festgelegt:

- (1) $a'a'' = 0$ für a', a'' in A .
- (2) $p'p''$ sei definiert wie in P für p', p'' in P .
- (3) Elemente in K operieren in natürlicher Weise in R .
- (4) $a(1)t = ta(1) = 0$, $a(i+1)t = ta(i+1) = a(i)$.

Dann ist R ein kommutativer Ring mit der folgenden Idealstruktur

$$0 < Ra(1) < \dots < Ra(i) < Ra(i+1) < \dots < A < \dots < R^{i+1} < R^i < \dots < Rt = N < R;$$

$$A = A_L, [Ra(i)]_L = Rt^i, [Rt^i]_L = Ra(i), 0 = R_L, R = 0_L, A = AN.$$

Also ist R ein autodualer Ring. Aber $N = Rt$ ist kein Nilideal, da A das umfassendste Nilideal ist.

Satz 4. Die folgenden Eigenschaften des autodualen Ringes R sind untereinander äquivalent.

- (i) In R existiert die Eins.
- (ii) In R existiert eine Linkseins.
- (iii) Es gibt keine unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R .
- (iv) Es gibt keine unendliche Menge unabhängiger minimaler Rechtsideale in R/N .
- (v) In R/N existiert die Eins.

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt. Wir nehmen weiter an, daß (i) gilt, und daß es eine unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R gibt. Dann gibt es auch eine abzählbar unendliche Menge unabhängiger minimaler Linksideale in R , die wir etwa mit $J(1), J(2), \dots, J(i), J(i+1), \dots$ bezeichnen. Wir setzen $U(i) = \sum_{j=1}^i J(j)$. Dies ist dann eine abnehmende Folge von Linksidealen. Aus der Unabhängigkeit der minimalen Linksideale $J(k)$ folgt insbesondere, daß $J(i) \cap U(i+1) = 0$, $J(i) + U(i+1) = U(i)$ ist. Also gilt

$$0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} U(i) < \dots < U(n+1) < U(n) < \dots < U(1).$$

Durch Dualisierung folgt dann aber, daß

$$U(1)_R < \dots < U(n)_R < U(n+1)_R < \dots$$

und daß $R = 0_R$ die Vereinigungsmenge der Ideale $U(n)_R$ ist. Nun existiert in R eine Linkseins e , so daß insbesondere $R = eR$ ist. Dann gehört aber e schon zu einem Ideal $U(n)_R < R$. Dies ist ein Widerspruch, der die Unmöglichkeit der Existenz unendlich vieler unabhängiger minimaler Linksideale erweist. Also ist (iii) eine Folge von (ii).

Wir nehmen jetzt die Gültigkeit von (iii) an. Es folgt aus Lemma 4, (d), daß $S = N_R = N_L$ die Summe aller minimalen Linksideale ist. Aus (iii) folgt dann, daß S die Summe endlich vieler minimaler Linksideale ist. Dann ist aber bekanntlich 0 der Durchschnitt von endlich vielen Linksidealen, die maximale Teilideale von S sind. Dualisierung zeigt, daß R

die Summe endlich vieler Rechtsideale ist, die minimale N enthaltende Ideale sind. Dann ist aber R/N Summe endlich vieler minimaler Rechtsideale, so daß (iv) aus (iii) folgt.

Daß (v) aus (iv) folgt, ist ein wohlbekannter Satz [da ja aus (iv) der Doppelkettensatz für Rechtsideale in R/N folgt]. Existiert schließlich in R/N die Eins, so folgern wir aus Lemma 4, (b), daß x stets zu $Rx \wedge xR$ gehört; und nun folgt aus Zusatz 3 die Existenz der Eins in R . Also ist (i) eine Folge von (v) und der Beweis der Äquivalenz der Eigenschaften (i) bis (v) ist erbracht.

Bemerkung. Natürlich entstehen durch Vertauschung von Rechts und Links aus den Eigenschaften (ii) bis (v) äquivalente Eigenschaften.

Beispiel eines autodualen Ringes ohne Eins.

Ein solches Beispiel erhält man ganz einfach, indem man eine direkte Summe unendlich vieler isomorpher, kommutativer Körper bildet.

Literaturverzeichnis.

BAER, R.

- [1] Inverses and zero-divisors. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 48 (1942), 630—638.
- [2] Radical ideals. Amer. Journal of Math. vol. 65 (1943), pp. 537—568.
- [3] Rings with duals. Amer. Journal of Math., vol. 65 (1943), pp. 569—584.

HALI, M.

- [1] A type of algebraic closure. Ann. of Math., vol. 40 (1939), pp. 360—369.

JACOBSON, N.

- [1] The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. Journal of Math., vol. 67 (1945), pp. 300—320.

KAPLANSKY, I.

- [1] Dual rings. Ann. of Math., vol. 49 (1948), pp. 689—701.

KÖTHE, G.

- [1] Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist. Math. Zeitschrift, Bd. 32 (1930), pp. 161—186.

(Eingegangen am 28. Januar 1952.)

Verallgemeinerte Matrixtransformationen.

Von

K. Zeller in Tübingen.

A. ROBINSON [3] und H. MELVIN-MELVIN [2] haben kürzlich den TOEPLITZschen und verwandte Sätze über Matrixtransformationen verallgemeinert. Wir bringen eine vereinfachte Darstellung ihrer Ergebnisse, wobei wir die Standardmethoden der Funktionalanalysis verwenden.

Wir betrachten zwei B -Räume $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, lineare stetige Operationen $A_{nk}(n, k = 0, 1, \dots)$ aus $(\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{F})$ und die Transformation

$$(1) \quad z_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k \quad (\text{mit } x_k \in \mathfrak{E}, z_n \in \mathfrak{F}).$$

Alle auftretenden Grenzwerte — z. B. die Summen in (1) — sind im Sinne der Norm des jeweils betrachteten B -Raumes zu verstehen.

Nun bezeichne $\mathfrak{E}_F$ die Menge der in $\mathfrak{E}$ konvergenten Folgen $x = \{x_k\}$.

Satz 1. *Genau dann existieren für jedes $x \in \mathfrak{E}_F$ alle Summen z_n und konvergieren die z_n für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert, wenn die A_{nk} folgenden Bedingungen genügen:*

$$(Z_n) \quad \left| \sum_{k=0}^r A_{nk} x_k \right| \leq M^1 \text{ für } |x_k| \leq 1 (k = 0, 1, \dots) \text{ und } n, r = 0, 1, \dots;$$

$$(Z_s) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x \quad (n = 0, 1, \dots) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x \text{ ex. für } x \in \mathfrak{E};$$

$$(Sp) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk} x \quad (k = 0, 1, \dots) \text{ ex. für } x \in \mathfrak{E}.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt und setzen wir $\lim_k x_k = x_*$, so gilt

$$(2) \quad \lim_n z_n = \lim_n \sum_k A_{nk} x_* + \sum_k \lim_n A_{nk} (x_k - x_*) \quad (x \in \mathfrak{E}_F).$$

Beweis. Wir benötigen zwei Lemmata. In diesen bedeuten die $U_n^{(r)}$ lineare stetige Operationen aus $(\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{F})$, wo $\mathfrak{D}$ ein weiterer B -Raum ist.

Lemma 1. *Existiert $\lim_n \lim_r U_n^{(r)}(x)$ für alle $x \in \mathfrak{D}$, so erfüllen die linearen Operationen $U_n(x) = \lim_r U_n^{(r)}(x)$ eine Beziehung $|U_n| \leq M (n = 0, 1, \dots)$.*

Lemma 2. *Gilt $|U_n^{(r)}| \leq M (n, r = 0, 1, \dots)$ und existiert*

$$\lim_n \lim_r U_n^{(r)}(x) = U(x)$$

für alle x einer Grundmenge in $\mathfrak{D}$, so existiert dieser Grenzwert sogar für alle x aus $\mathfrak{D}$ und U ist eine lineare stetige Operation mit $|U| \leq M$.

Die Lemmata erhalten wir durch zweimalige Anwendung von Th. 3 bzw. Th. 5 bei BANACH [1], S. 79–80 (Th. 3 und 5 sind die bekannten

¹⁾ $M, M(x), K$ bedeuten gewisse, nicht näher bestimmte positive Zahlen.

Sätze über Folgen linearer Operationen). Bei den Anwendungen setzen wir

$$(3) \quad U_n^{(r)}(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^r A_{nk} x_k \quad (\text{mit } \mathfrak{x} = \{x_k\}).$$

Nun bildet $\mathfrak{G}_F$ bei natürlicher Erklärung der „linearen Verknüpfungen“ einen B -Raum mit der Norm $|\mathfrak{x}| = \text{fin}_k |x_k|$. In $\mathfrak{G}_F$ bilden die Folgen der Form $\{x, x, x, \dots\}$ und $\{0, \dots, 0, x_r, 0, \dots\}$ (r bel.) eine Grundmenge. Genauer gilt für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_F$

$$(4) \quad \{x_*, x_*, \dots\} + \{x_0 - x_*, \dots, x_r - x_*, 0, 0, \dots\} \rightarrow \mathfrak{x} \quad (r \rightarrow \infty).$$

(Man vgl. die entsprechenden Tatsachen für Zahlenfolgen, s. etwa BANACH [1], S. 11 und 65.) Wir fassen nun die U aus (3) als Operationen von $\mathfrak{G}_F$ in $\mathfrak{F}$ auf.

Die Bedingungen sind notwendig. Für Z_s und S_p ist das klar. Bei Z_u folgt die Notwendigkeit aus Lemma 1, denn jede Folge der Form $\{x_0, \dots, x_r, 0, 0, \dots\}$ mit $|x_k| \leq 1$ gehört zu $\mathfrak{G}_F$ und hat in $\mathfrak{G}_F$ eine Norm ≤ 1 .

Die Bedingungen sind hinreichend. Dies ergibt sich aus Lemma 2 (die Grundmengenbedingung ist wegen Z_s und S_p erfüllt).

Die Formel (2) erhält man aus der Stetigkeit von U (vgl. Lemma 2) und (4).

Wir gehen zum nächsten Satz über und setzen

$$(5) \quad y_n = \sum_{k=0}^n x_k \quad (n = 0, 1, \dots; y_n, x_k \in \mathfrak{G}).$$

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{G}_R$ der in $\mathfrak{G}$ konvergenten Reihen, d. h. derjenigen $\mathfrak{x} = \{x_k\}$, für die $\mathfrak{y} = \{y_n\} \in \mathfrak{G}_F$ ist.

Satz 2. *Genau dann existieren für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_R$ alle Summen z_n und konvergieren die z_n für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert, wenn die A_{nk} neben S_p folgender Bedingung genügen:*

$$(Zn^*) \quad \left| \sum_{k=0}^r (A_{nk} - A_{n,k+1}) y_k \right| \leq M \quad \text{für } |y_k| \leq 1 \\ (k = 0, 1, \dots) \text{ und } n, r = 0, 1, \dots$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$(6) \quad \lim_n z_n = \sum_k \lim_n A_{nk} x_k.$$

Beweis. Wir gehen genau so vor wie bei Satz 1. $\mathfrak{G}_R$ bildet einen B -Raum mit der Norm $|\mathfrak{x}| = \text{fin}_n |y_n|$. Die Folgen der Form

$$\{0, \dots, 0, x_r, 0, \dots\} \quad (r \text{ bel.})$$

bilden in $\mathfrak{G}_R$ eine Grundmenge, genauer gilt für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_R$

$$(7) \quad \{x_0, \dots, x_r, 0, 0, \dots\} \rightarrow \mathfrak{x} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Es ist (ABELSCHE partielle Summation)

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{r+1} A_{nk} x_k = \sum_{k=0}^r (A_{nk} - A_{n,k+1}) y_k + A_{n,r+1} y_{r+1} = U_n^{(r+1)}(\mathfrak{x}).$$

Die Bedingungen sind notwendig. Sei $|y_k| \leq 1$ ($k = 0, 1, \dots$), $y_k = 0$ ($k > r$), sonst beliebig. Dann ist $x \in \mathfrak{E}_R$, $x_k = 0$ ($k > r + 1$) und (in $\mathfrak{E}_R$) $|x| \leq 1$. Lemma 1 liefert nun mittels (8) die Bedingung Zn^* . Sp ist offenbar notwendig.

Die Bedingungen sind hinreichend. Aus Sp folgt — man vergleiche Lemma 2 — die Beziehung $|A_{n0}| \leq K$ ($n = 0, 1, \dots$). Setzt man in Zn^* lauter gleiche y_k ein, so erhält man $|A_{nk}| \leq M + K$ ($n, k = 0, 1, \dots$). Aus (8) sieht man $|U_n^{(r)}| \leq 2M + K$ ($n, r = 0, 1, \dots$). Lemma 2 liefert die Behauptung.

Die Formel (6) erhält man anschließend mit (7).

Man könnte bei der Transformation in Satz 1 (oder in Satz 2) die schwächere Forderung stellen, daß z_n nur für $n > n_0(x)$ erklärt ist. Dann ergibt sich, daß es ein allen x gemeinsames n_0 gibt. Zum Beweise bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_n$ die Menge der x aus $\mathfrak{E}_F$, für die z_n erklärt ist. Nach BANACH [1], S. 24, Th. 5, ist entweder $\mathfrak{G}_n$ mager (d. h. von I. Kategorie) in $\mathfrak{E}_F$ oder $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{E}_F$. Entsprechendes gilt dann für die Mengen $\mathfrak{G}_r = \bigcap_{n=r}^{\infty} \mathfrak{G}_n$. Aus der eingangs erwähnten Forderung folgt $\bigcup_{r=0}^{\infty} \mathfrak{G}_r = \mathfrak{E}_F$, somit ist ein $\mathfrak{G}_{n_0} = \mathfrak{E}_F$, w. z. b. w.

Es sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die betreffenden Transformationen als lineare stetige Transformationen von $\mathfrak{E}_F$ bzw. $\mathfrak{E}_R$ in $\mathfrak{F}_F$ zu behandeln. n kann durch einen stetigen Parameter ersetzt werden. Man betrachtet etwa z_t für $t > \infty$ und erhält im wesentlichen dieselben Bedingungen wie in Satz 1 und 2.

ROBINSON untersucht auch beliebige lineare, also nicht notwendig stetige Operationen A_{nk} , wobei sich an den Resultaten wenig ändert, da sich bei den betreffenden Transformationen als notwendige Bedingung ergibt, daß „fast alle“ A_{nk} , genauer: alle A_{nk} mit $k > k_0$ (wo k_0 eine gewisse Zahl ist), stetig sind. Unsere Methoden lassen sich in diesem Fall nicht anwenden (ROBINSON arbeitet mit dem „gleitenden Buckel“). MELVIN-MELVIN beschäftigt sich ferner mit der Frage, wann in den Bedingungen Zs und Sp die „schwache“ Konvergenz der Operationenfolgen durch „starke“ ersetzt werden darf.

Ähnlich wie in Satz 1 und 2 kann man Verallgemeinerungen anderer verwandter Transformationssätze erhalten.

Literaturverzeichnis.

BANACH, S.

[1] Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

MELVIN-MELVIN, H.

[2] On generalized k -transformations in BANACH spaces. Proc. London math. Soc., II. s., 53, 83—108 (1951).

ROBINSON, A.

[3] On functional transformations and summability. Proc. London math. Soc., II. s., 52, 132—160 (1950).

(Eingegangen am 4. Dezember 1951.)

Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I.

Von

Hans-Egon Richert in Göttingen.

1. Bezeichnet $p(m)$ wie üblich die Anzahl der Partitionen von m , $a_0(m)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen ABELSchen Gruppen der Ordnung n , so ist bekanntlich¹⁾

$$a_0(1) = 1, \quad a_0(n) = p(\alpha_1) p(\alpha_2) \dots p(\alpha_r)$$

für die kanonische Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Für festes p ist

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_0(p^v) p^{-vs} = \prod_{v=1}^{\infty} (1 - p^{-vs})^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 0,$$

und da $a_0(n)$ distributiv ist, folgt

$$(1) \quad Z_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n) n^{-s} = \prod_{v=1}^{\infty} \xi(v s), \quad \sigma > 1.$$

Ersichtlich ist $Z_0(s)$ mit Ausnahme der einfachen Pole bei $s = \frac{1}{v}$, $v = 1, 2, \dots$ in $\sigma > 0$ regulär.

Im folgenden soll eine asymptotische Entwicklung für die summatorische Funktion $A_0(x) = \sum_{n \leq x} a_0(n)$ angegeben werden. Dieses Problem ist bereits von D. G. KENDALL und R. A. RANKIN²⁾ behandelt worden. Ihr Ergebnis lautete mit gewissen Konstanten C_1, C_2 *)

$$(2) \quad A_0(x) = C_1 x + C_2 x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}} \log^3 x).$$

Dabei wurde ein bekannter Satz der analytischen Zahlentheorie von LANDAU benutzt, um mit

$$(3) \quad \begin{aligned} Z_1(s) &= \xi(s) \xi(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n) n^{-s}, \\ A_1(x) &= \sum_{n \leq x} a_1(n) = \sum_{m^2 n \leq x} 1, \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 1937, 49—51.

²⁾ D. G. KENDALL und R. A. RANKIN, Quart. J. Oxford, **18**, 1947, 197—208.

*) Anm. bei der Korrektur: Prof. RANKIN machte mich inzwischen darauf aufmerksam, daß in den Fehlergliedern ihrer Ergebnisse, die hier unter (2) und (4) genannt sind, noch der Faktor $\log x$ anzubringen ist (vgl. Math. Reviews, **12**, 316).

die Entwicklung*)

$$(4) \quad A_1(x) = C'_1 x + C'_2 x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{3}} \log x)$$

herzuleiten.

Hier werden wir den LANDAUSCHEN Satz durch eine andere Aussage, die wir in Lemma 3 gewinnen werden, ersetzen. Wenn man zwei dort auftretende Summen trivial abschätzte, würde dann (4), sogar ohne den Faktor $\log x$, folgen. Zieht man aber die VAN DER CORPUTSCHE Theorie der Exponentenpaare heran, so läßt sich der Exponent im Fehlerglied von (4) sogar unter $\frac{1}{4}$, nämlich auf $\frac{2}{9}$, bringen (Satz 3). Dann ergibt sich in einfacher Weise weiter, daß man in der Entwicklung (2) aus dem Fehlerglied noch einen Term der Form $C_3 x^{\frac{1}{3}}$ herausziehen kann. Das dort verbleibende Fehlerglied besitzt dann die Größenordnung $x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x$ (Satz 4).

2. Es seien

$$(5) \quad Z_2(s) = \zeta(s) \zeta(2s) \zeta(3s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_2(n) n^{-s},$$

$$(6) \quad Z_3(s) = \prod_{\nu=4}^{\infty} \zeta(\nu s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_3(n) n^{-s},$$

$$(7) \quad Z_4(s) = \prod_{\nu=5}^{\infty} \zeta(\nu s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n) n^{-s},$$

$$(8) \quad c_{\mu} = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right), \quad \mu = 1, 2, \dots,$$

$$(9) \quad \psi(\omega) = \omega - [\omega] - \frac{1}{2},$$

$$(10) \quad R_1(\omega, \varrho) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \leq \omega^{\varrho+1}}} \psi\left(\frac{\omega}{n^{\varrho}}\right),$$

$$(11) \quad R_2(\omega, \varrho) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \leq \omega^{\varrho+1}}} \psi\left(\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right).$$

Die Summation $n \leq \omega$ bedeute stets $n = 1, 2, \dots, [\omega]$.

3. Wir wollen zunächst ein allgemeines Teilerproblem angreifen. Wir benötigen nur einen Spezialfall desselben, doch verursacht es nicht mehr Mühe, das Problem in der nachfolgenden allgemeinen Form zu behandeln.

Es seien x, μ, ν reelle Zahlen, $x \geq 1, \mu > \nu > 0$,

$$(12) \quad D(x; \mu, \nu) = \sum_{m^{\mu} n^{\nu} \leq x} 1,$$

und wir fragen nach einer asymptotischen Entwicklung für $D(x; \mu, \nu)$.

Wegen

$$D(x; \mu, \nu) = \sum_{\substack{\mu \\ m^{\nu} n^{\nu} \leq x^{\nu}}} 1 = D\left(x^{\frac{1}{\nu}}; \frac{\mu}{\nu}, 1\right)$$

können wir uns, wenn wir $x^{\nu} = \tau$ und $\frac{\mu}{\nu} = \varrho$ setzen, bei der Herleitung auf $D(\tau; \varrho, 1)$ mit $\varrho > 1$ beschränken.

Wir benötigen folgende Hilfssätze:

Lemma 1. Sind $g_1(n)$, $g_2(n)$ zwei zahlentheoretische Funktionen, ω , w , ϱ reelle Zahlen,

$$\omega \geq 1, 1 \leq w \leq \omega^{\varrho}, \varrho > 0, G_{\nu}(\omega) = \sum_{n \leq \omega} g_{\nu}(n), \quad \nu = 1, 2,$$

so gilt

$$\sum_{m^{\varrho} n \leq \omega} g_1(m) g_2(n) = \sum_{m \leq w} g_1(m) G_2\left(\frac{\omega}{m^{\varrho}}\right) + \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega}{w^{\varrho}} \\ m^{\varrho} n \leq \omega}} g_2(n) G_1\left(\left(\frac{\omega}{n}\right)^{\varrho}\right) - G_1(w) G_2\left(\frac{\omega}{w^{\varrho}}\right).$$

Beweis. Klar.

Lemma 2. Es seien ω und z zwei reelle Zahlen, $\omega > 0$, $0 < z \neq 1$. Dann ist

$$\sum_{n \leq \omega} n^{-z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \omega^{1-z} - \psi(\omega) \omega^{-z} + O(\omega^{-z-1}).$$

Beweis. Folgt aus der Eulerschen Summenformel zweiter Ordnung.

Lemma 3. Für $\tau \geq 1$, $\varrho > 1$ ist

$$D(\tau; \varrho, 1) = \sum_{m^{\varrho} n \leq \tau} 1 = \xi(\varrho) \tau + \xi\left(\frac{1}{\varrho}\right) \tau^{\varrho} - R_1(\tau, \varrho) - R_2(\tau, \varrho) + O(1).$$

Beweis. Nach (12) und Lemma 1, wenn wir dort $g_1(n) = g_2(n) = 1$ und $w = \tau^{\frac{1}{\varrho+1}}$ setzen, ist

$$D(\tau; \varrho, 1) = \sum_{m \leq \tau^{\frac{1}{\varrho+1}}} \left[\frac{\tau}{m^{\varrho}} \right] + \sum_{n \leq \tau^{\frac{1}{\varrho+1}}} \left[\left(\frac{\tau}{n} \right)^{\varrho} \right] - \left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}} \right]^2,$$

also nach (9), (10) und (11)

$$\begin{aligned} D(\tau; \varrho, 1) &= -R_1(\tau, \varrho) - R_2(\tau, \varrho) + \sum_{n \leq \tau^{\frac{1}{\varrho+1}}} \left(\frac{\tau}{n^{\varrho}} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{n \leq \tau^{\frac{1}{\varrho+1}} \\ m^{\varrho} n \leq \tau}} \left(\left(\frac{\tau}{n} \right)^{\varrho} - \frac{1}{2} \right) - \left[\tau^{\frac{1}{\varrho+1}} \right]^2. \end{aligned}$$

Verwenden wir hierin Lemma 2 (man beachte $q \neq 1$) mit $\omega = \tau^{\frac{1}{q+1}}$ für $x = q$ und $x = \frac{1}{q}$, so folgt

$$\begin{aligned} D(\tau; q, 1) &= -R_1(\tau, q) - R_2(\tau, q) \\ &+ \tau \left(\xi(q) - \frac{1}{q-1} \tau^{\frac{1-q}{q+1}} - \psi \left(\tau^{\frac{1}{q+1}} \right) \tau^{-\frac{q}{q+1}} + O(\tau^{-1}) \right) \\ &+ \tau^{\frac{1}{q}} \left(\xi \left(\frac{1}{q} \right) - \frac{1}{\frac{1}{q}-1} \tau^{\frac{1-\frac{1}{q}}{q+1}} - \psi \left(\tau^{\frac{1}{q+1}} \right) \tau^{-\frac{1}{q(q+1)}} + O \left(\tau^{-\frac{1+\frac{1}{q}}{q+1}} \right) \right) \\ &- \left[\tau^{\frac{1}{q+1}} \right] - \left[\tau^{\frac{1}{q+1}} \right]^2 = \xi(q) \tau + \xi \left(\frac{1}{q} \right) \tau^{\frac{1}{q}} - R_1(\tau, q) - R_2(\tau, q) + O(1). \end{aligned}$$

4. Um die Funktionen $R_\nu(\tau, q)$, $\nu = 1, 2$ ausreichend abzuschätzen, wollen wir die VAN DER CORPUTSche³⁾ Methode der Exponentenpaare in der von E. PHILLIPS⁴⁾ vereinfachten Form anwenden. Hierfür benötigen wir die

Definition⁵⁾. Wir werden das Paar absoluter Konstanten (k, l) ein Exponentenpaar nennen, wenn

$$(13) \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

und es zu jeder positiven Zahl h zwei nur von h abhängige Zahlen r und c (r ganz, ≥ 5 , $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, so daß stets die Abschätzung

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(z^k a^l)$$

mit nur von h und u abhängiger O -Konstanten gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(14) \quad u > 1, \quad 1 \leq a < b < ua, \quad y > 0, \quad z = ya^{-h} > 1,$$

$$(15) \quad \begin{cases} f(n) \text{ ist im Intervall } a \leq n \leq b \text{ definiert, reell, } r\text{-mal differenzierbar und für } a \leq n \leq b, 0 \leq p \leq r-1 \text{ ist} \\ |f^{(p+1)}(n) - (-1)^p y h(h+1) \dots (h+p-1) n^{-h-p}| \\ < c y h(h+1) \dots (h+p-1) n^{-h-p}. \end{cases}$$

Lemma 4. $(0, 1)$ ist ein Exponentenpaar.

Beweis. Stets gilt die triviale Abschätzung

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leq b < ua = uz^0 a^1.$$

³⁾ J. G. VAN DER CORPUT, Math. Annalen, **87**, 1922, 39–65.

⁴⁾ ERIC PHILLIPS, Quart. J. Oxford, **4**, 1933, 209–225.

⁵⁾ l. c. ⁴⁾ Definition.

Lemma 5⁶⁾. Ist (k, l) ein Exponentenpaar, so ist es auch für jedes natürliche q (k_q, l_q) mit

$$k_q = \frac{1}{2} - \frac{1-l+qk}{Q+2(Q-1)k}, \quad l_q = \frac{1}{2} + \frac{k}{Q+2(Q-1)k}, \quad \text{wo } Q = 2^q.$$

* Lemma 6⁷⁾. Es sei $a < b$, $f(n)$ im Intervall $a \leq n \leq b$ reell und zweimal differenzierbar, $|f'(b) - f'(a)| < 2$, $f''(n)$ stets $\leq -\lambda$, wo λ eine von n unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = O(1) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}).$$

Lemma 7. Ist $g(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, $\xi > 0$, so ist für $1 \leq a < b < 2a$

$$\sum_{a \leq n \leq b} \psi(g(n)) = O(a^{\xi-1}) + O\left(\sum_{v=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{v^2}, \frac{1}{v}\right) \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i v g(n)} \right|\right).$$

Beweis. Zunächst ist für $\xi > 0$ ⁸⁾

$$\xi \int_0^{\xi-1} \psi(g(n) \pm t) dt = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ v \neq 0}}^{\infty} d_v e^{2\pi i v g(n)}$$

mit

$$d_v = O\left(\frac{\xi}{v^2}\right), \quad d_v = O\left(\frac{1}{v}\right),$$

also

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi \int_0^{\xi-1} \sum_{a \leq n \leq b} \psi((g(n) \pm t) dt &= \sum_{\substack{v \neq 0 \\ v \neq 0}}^{\infty} d_v \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i v g(n)} \\ &= O\left(\sum_{v=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{v^2}, \frac{1}{v}\right) \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i v g(n)} \right|\right). \end{aligned}$$

Ferner ist für $t > 0$

$$\psi(g(n) + t) - t \leq \psi(g(n)) \leq \psi(g(n) - t) + t$$

und daher für $\xi > 0$

$$\xi \int_0^{\xi-1} \psi(g(n) + t) dt - \frac{1}{2} \xi^{-1} \leq \psi(g(n)) \leq \xi \int_0^{\xi-1} \psi(g(n) - t) dt + \frac{1}{2} \xi^{-1}.$$

Summieren wir hierin für $1 \leq a < b < 2a$ über $a \leq n \leq b$, so folgt mit (16)

$$\sum_{a \leq n \leq b} \psi(g(n)) = O(a^{\xi-1}) + O\left(\sum_{v=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{v^2}, \frac{1}{v}\right) \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i v g(n)} \right|\right).$$

⁶⁾ l. c. ⁴⁾ Theorem 4.

⁷⁾ l. c. ³⁾ Hilfssatz 3.

⁸⁾ l. c. ³⁾, 54.

Lemma 8. Es seien α, β, γ drei positive, reelle Zahlen und (k, l) ein Exponentenpaar mit $k > 0$. Dann ist für $x \geq 2$

$$\sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + \begin{cases} O\left(x^{\frac{\alpha l + (\beta - \alpha\gamma)k}{k+1}}\right) & \text{für } l > \gamma k, \\ O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} \log x\right) & \text{für } l = \gamma k, \\ O\left(x^{\frac{\beta k}{1 + (1+\gamma)k - l}}\right) & \text{für } l < \gamma k. \end{cases}$$

Beweis. Wir beachten, daß für natürliches ν die Funktion $f(n) = -\frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}$ der Bedingung (15) in der Definition eines Exponentenpaares genügt, wenn wir dort setzen $y = \gamma \nu x^\beta$, $h = \gamma + 1$, $u = 2$, denn nach der Festlegung von h und u sind r und c bestimmt. $f(n)$ ist beliebig oft, also r -mal differenzierbar.

Sind weiter $1 \leq a < b < 2a$ und $z = \gamma \nu x^\beta a^{-\gamma-1} > 1$, so sind auch die Bedingungen (14) erfüllt, so daß wir erhalten ((k, l) bezeichnet in diesem Beweis irgendein Exponentenpaar mit $k > 0$)

$$(17) \quad \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O((\nu x^\beta a^{-\gamma-1})^k a^l) = O(\nu^k x^{\beta k} a^{l - (1+\gamma)k})$$

für $1 \leq a < b < 2a$, $a^{\gamma+1} < \gamma \nu x^\beta$.

Ferner sind für $1 \leq a < b < 2a$ und $a^{\gamma+1} \geq \gamma \nu x^\beta$ bei $f(n) = -\frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}$ die Voraussetzungen in Lemma 6 mit $\lambda = \gamma(\gamma + 1) \nu x^\beta a^{-\gamma-2}$ erfüllt, so daß wir nach Lemma 6 bekommen

$$\sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O(1) + O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) = O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right)$$

für $1 \leq a < b < 2a$, $a^{\gamma+1} \geq \gamma \nu x^\beta$.

Hieraus folgt mit (17)

$$(18) \quad \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i \frac{\nu x^\beta}{n^\gamma}} = O(\nu^k x^{\beta k} a^{l - (1+\gamma)k}) + O\left(\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right)$$

für $1 \leq a < b < 2a$.

Wählen wir nun in Lemma 7 $g(n) = \frac{x^\beta}{n^\gamma}$, so folgt mit (18) bei Beachtung von (12) und $k > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) &= O(a \xi^{-1}) \\ &+ O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi}{\nu^2}, \frac{1}{\nu}\right) \left(\nu^k x^{\beta k} a^{l - (1+\gamma)k} + \nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) \\ &= O(a \xi^{-1}) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) + O(\xi^k x^{\beta k} a^{l - (1+\gamma)k}) \quad \text{für } 1 \leq a < b < 2a. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\xi = x^{-\frac{\beta k}{k+1}} a^{\frac{1+(1+\gamma)k-l}{k+1}},$$

so erhalten wir

$$(19) \quad \sum_{a \leq n \leq b} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} a^{\frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2}} a^{1+\frac{\gamma}{2}}\right) \\ \text{für } 1 \leq a < b < 2a.$$

In den folgenden Rechnungen mögen Summen der Form $\sum_{A \leq n \leq B}$ mit $A > B > 0$ bedeuten. Wir werden die Fälle $l \geq \gamma k$ unterscheiden. Zunächst ist

$$(20) \quad \sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = \sum_{1 \leq m \leq K} \sum_{2^{m-1} \leq n \leq 2^m - 1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) + \sum_{2^K \leq n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right),$$

$$\text{wo } K = \left\lfloor \frac{\log x^\alpha}{\log 2} \right\rfloor.$$

Ist $l > \gamma k$, so verwenden wir (19) in (20) und erhalten

$$\sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O(1) \sum_{1 \leq m \leq K} \left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} 2^{m \frac{l-\gamma k}{k+1}} + x^{-\frac{\beta}{2}} 2^{m(1+\frac{\gamma}{2})} \right) \\ + O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1} + \alpha \frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) + O\left(x^{-\frac{\beta}{2} + \alpha(1+\frac{\gamma}{2})}\right) \\ = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\alpha l + (\beta - \alpha\gamma)k}{k+1}}\right).$$

Ist $l = \gamma k$, so folgt wegen $K = O(\log x)$ ebenso

$$\sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1}} \log x\right).$$

Ist dagegen $l < \gamma k$, so setzen wir mit der Abkürzung

$$\delta = \frac{\beta k}{1 + (1 + \gamma)k - l}$$

$$(21) \quad \sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = \sum_{n \leq 2^{L-1}-1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) + \sum_{L \leq m \leq K} \sum_{2^{m-1} \leq n \leq 2^m - 1} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) \\ + \sum_{2^K \leq n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right), \text{ wo } L = 1 + \left\lfloor \frac{\log(1+x^\delta)}{\log 2} \right\rfloor.$$

In (21) schätzen wir die erste Summe trivial ab. In den beiden übrigen Summen verwenden wir wieder (19) und erhalten

$$\sum_{n \leq x^\alpha} \psi\left(\frac{x^\beta}{n^\gamma}\right) = O(x^\delta) + O\left(x^{\alpha(1+\frac{\gamma}{2}) - \frac{\beta}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{k+1} + \delta \frac{l-\gamma k}{k+1}}\right) \\ = O\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha\gamma)}\right) + O\left(x^{\frac{\beta k}{1 + (1 + \gamma)k - l}}\right).$$

Damit ist Lemma 8 vollständig bewiesen.

Bisher kennen wir nur das Exponentenpaar $(0, 1)$, und Lemma 8 würde mit diesem nur die nach (10) und (11) ohnehin triviale Abschätzung $R_\nu(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{\varrho+1}}\right)$ ($\nu = 1, 2$) liefern. Geeignete Exponentenpaare können wir nun mit Hilfe von Lemma 5 erhalten. Dabei wollen wir uns mit einem einfachen Exponentenpaar begnügen, da weitere Rechnungen in keinem Verhältnis zu den geringfügigen Verbesserungen stehen.

Nach Lemma 4 ist $(0, 1)$ ein Exponentenpaar. Nach Lemma 5 ist daher auch mit $q = 1$ ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) ein Exponentenpaar. Hieraus erhalten wir abermals mit Lemma 5 neue Exponentenpaare, z. B. mit $q = 3$ bzw. $q = 2$ beziehentlich die Exponentenpaare $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $(\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$.

Benutzen wir nun etwa das letzte dieser Exponentenpaare in Lemma 8, so folgt mit $\alpha = \frac{1}{\varrho+1}$, $\beta = 1$, $\gamma = \varrho$ nach (10)

$$(22) \quad R_1(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{2(\varrho+1)}}\right) + \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{9}} \log \tau) & \text{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho > 2. \end{cases}$$

und mit $\alpha = \frac{1}{\varrho+1}$, $\beta = \frac{1}{\varrho}$, $\gamma = \frac{1}{\varrho}$ nach (11) wegen $\varrho > 1$

$$(23) \quad R_2(\tau, \varrho) = O\left(\tau^{\frac{1}{2(\varrho+1)}}\right) + O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right).$$

Aus (22) und (23) folgt wegen $\varrho > 1$

$$(24) \quad R_1(\tau, \varrho) + R_2(\tau, \varrho) = \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{9}} \log \tau) & \text{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho > 2. \end{cases}$$

Aus (24) und Lemma 3 haben wir daher den

Satz 1. Sind τ und ϱ zwei reelle Zahlen $\tau \geq 2$, $\varrho > 1$, so gilt

$$D(\tau; \varrho, 1) = \sum_{m \leq \tau} 1 = \zeta(\varrho) \tau + \zeta\left(\frac{1}{\varrho}\right) \tau^{\frac{1}{\varrho}} + \begin{cases} O\left(\tau^{\frac{2}{3(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho < 2, \\ O(\tau^{\frac{2}{9}} \log \tau) & \text{für } \varrho = 2, \\ O\left(\tau^{\frac{2}{3+2(\varrho+1)}}\right) & \text{für } \varrho > 2. \end{cases}$$

Setzen wir wieder $\tau = x^{\frac{1}{v}}$, $\varrho = \frac{\mu}{v}$, so folgt

Satz 2. Sind x, μ, v reelle Zahlen, $x \geq 2$, $\mu > v > 0$, so gilt

$$D(x; \mu, v) = \sum_{m^{\mu} n^{\nu} \leq x} 1 = \xi\left(\frac{\mu}{v}\right) x^{\frac{1}{v}} + \xi\left(\frac{v}{\mu}\right) x^{\frac{1}{\mu}} + \begin{cases} O\left(x^{\frac{2}{3(\mu+v)}}\right) & \text{für } \mu < 2v, \\ O\left(x^{\frac{2}{9v}} \log x\right) & \text{für } \mu = 2v, \\ O\left(x^{\frac{2}{2\mu+5v}}\right) & \text{für } \mu > 2v. \end{cases}$$

Insbesondere folgt für $\varrho = 2$ aus Satz 1 nach (3)

Satz 3. Ist $a_1(n)$ die Anzahl der quadratischen Teiler von n , also $a_1(n) = \sum_{d^2|n} 1$, so gilt für die summatorische Funktion

$$A_1(x) = \sum_n a_1(n) = \xi(2)x + \xi\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{2}{9}} \log x).$$

5. Hiermit können wir nun leicht zu einer Aussage über $A_v(x)$ gelangen. Zunächst beweisen wir noch vier Hilfssätze:

Lemma 9. Es ist für jedes positiv-reelle ω

$$\sum_{n \leq \omega} a_1(n) n^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \xi(2) \omega^{\frac{2}{3}} + 3 \xi\left(\frac{1}{2}\right) \omega^{\frac{1}{6}} + \xi\left(\frac{1}{3}\right) \xi\left(\frac{2}{3}\right) + O(\omega^{-\frac{1}{9}} \log \omega).$$

Beweis. Nach (3) ist

$$\sum_{n \leq \omega} a_1(n) n^{-\frac{1}{3}} = \sum_{m^2 n \leq \omega} m^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}}.$$

Wir setzen in Lemma 1 $g_1(n) = n^{-\frac{2}{3}}$, $g_2(n) = n^{-\frac{1}{3}}$, $\varrho = 2$ und $w = \omega^{\frac{1}{3}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq \omega} a_1(n) n^{-\frac{1}{3}} &= \sum_{m \leq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega}{m^2} \\ n \leq \omega^{\frac{1}{3}}}} n^{-\frac{1}{3}} + \sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{\frac{\omega}{n}} \\ m \leq \omega^{\frac{1}{3}}}} m^{-\frac{2}{3}} \\ &\quad - \left(\sum_{m \leq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \right) \left(\sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Hierin sind nach Lemma 2 mit (10) und (11)

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \sum_{\substack{n \leq \frac{\omega}{m^2} \\ n \leq \omega^{\frac{1}{3}}}} n^{-\frac{1}{3}} &= \sum_{m \leq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \psi\left(\frac{\omega}{m^2}\right) \left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{-\frac{1}{3}} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\frac{\omega}{m^2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \right) = \xi\left(\frac{1}{3}\right) \left(\xi\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \omega^{\frac{1}{9}} - \psi\left(\omega^{\frac{1}{3}}\right) \omega^{-\frac{2}{9}} + O(\omega^{-\frac{5}{9}}) \right) \\ &\quad + \frac{3}{2} \omega^{\frac{2}{3}} (\xi(2) - \omega^{-\frac{1}{3}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}}) \omega^{-\frac{2}{3}} + O(\omega^{-1})) - \omega^{-\frac{1}{3}} R_1(\omega, 2) + O(\omega^{-\frac{1}{3}}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \sum_{m \leq \frac{\omega}{n}} m^{-\frac{2}{3}} = \sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \left(\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \left(\left| \frac{\omega}{n} \right| \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\
 & \quad \left. - \psi \left(\left| \frac{\omega}{n} \right| \right) \left(\left| \frac{\omega}{n} \right| \right)^{\frac{2}{3}} + O \left(\left(\left| \frac{\omega}{n} \right| \right)^{\frac{5}{3}} \right) \right) \\
 & = \zeta\left(\frac{2}{3}\right) \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \omega^{\frac{2}{9}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}}) \omega^{-\frac{1}{9}} + O(\omega^{\frac{1}{9}}) \right) \\
 & \quad + 3 \omega^{\frac{1}{6}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \omega^{\frac{1}{6}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}}) \omega^{-\frac{1}{6}} + O(\omega^{-\frac{1}{2}}) \right) - \omega^{-\frac{1}{3}} R_2(\omega, 2) + O(\omega^{-\frac{1}{3}}), \\
 (28) \quad & \left(\sum_{m \leq \omega^{\frac{1}{3}}} m^{-\frac{2}{3}} \right) \left(\sum_{n \leq \omega^{\frac{1}{3}}} n^{-\frac{1}{3}} \right) \\
 & = \left(\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \omega^{\frac{1}{9}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}}) \omega^{-\frac{2}{9}} \right) \left(\zeta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \omega^{\frac{2}{9}} - \psi(\omega^{\frac{1}{3}}) \omega^{-\frac{1}{9}} + O(\omega^{-\frac{1}{3}}) \right).
 \end{aligned}$$

Aus (25) bis (28) folgt dann

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq \omega} a_1(n) n^{-\frac{1}{3}} &= \frac{3}{2} \zeta(2) \omega^{\frac{2}{3}} + 3 \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \omega^{\frac{1}{6}} \\
 &\quad + \zeta\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{2}{3}\right) \omega^{-\frac{1}{3}} (R_1(\omega, 2) + R_2(\omega, 2)) + O(\omega^{-\frac{1}{3}}).
 \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir hierin (24), so folgt die Behauptung.

Lemma 10. *Es ist*

$$A_2(x) = \sum_{n \leq x} a_2(n) = \zeta(2) \zeta(3) x + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} + \zeta\left(\frac{1}{3}\right) \zeta\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x).$$

Beweis. Nach (5), (3) und Lemma 1 ($g_1(n) = 1$, $g_2(n) = a_1(n)$, $\omega = x$, $w = v$, $\varrho = 3$) ist mit der Abkürzung $v = x^{\frac{1}{30}} \log^{-\frac{3}{10}} x$

$$(29) \quad A_2(x) = \sum_{m^3 n \leq x} a_1(n) = \sum_{m \leq v} A_1\left(\frac{x}{m^3}\right) + \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{v^3}}} a_1(n) \left[\left| \frac{x}{n} \right| - [v] A_1\left(\frac{x}{v^3}\right) \right].$$

Hierin sind nach Satz 3 und Lemma 2

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \sum_{m \leq v} A_1\left(\frac{x}{m^3}\right) = \zeta(2) x \left(\zeta(3) - \frac{1}{2} v^{-2} \right) + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x) \\
 & \quad + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} \left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - 2 v^{-\frac{1}{2}} \right) = \zeta(2) \zeta(3) x + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \zeta(2) x v^{-2} - 2 \zeta\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & [v] A_1\left(\frac{x}{v^3}\right) = O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x) + v \left(\zeta(2) \frac{x}{v^3} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \right) \\
 & = \zeta(2) x v^{-2} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x)
 \end{aligned}$$

und nach Lemma 9, wenn wir dort $\omega = \frac{x}{v^3}$ setzen,

$$(32) \quad \sum_{n \leq \frac{x}{v^3}} a_1(n) \left[\left\lfloor \sqrt[3]{\frac{x}{n}} \right\rfloor \right] = O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x) + x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2} \xi(2) x^{\frac{2}{3}} v^{-2} + 3 \xi\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{6}} v^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \xi\left(\frac{1}{3}\right) \xi\left(\frac{2}{3}\right) + O(x^{-\frac{1}{9}} v^{\frac{1}{3}} \log x) \right) \\ = \frac{3}{2} \xi(2) x v^{-2} + 3 \xi\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} + \xi\left(\frac{1}{3}\right) \xi\left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x).$$

Jetzt folgt aus (29) bis (32) die Behauptung.

Lemma 11. *Es ist*

$$A_3(x) = \sum_{n \leq x} a_3(n) = O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Beweis. Nach (6) und (7) ist

$$A_3(x) = \sum_{m^4 n \leq x} a_4(n) \leq \sum_{n \leq x} \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{1}{4}} a_4(n) \leq x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} a_4(n) n^{-\frac{1}{4}} = O(x^{\frac{1}{4}}),$$

da $Z(s)$ für $\sigma = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ absolut konvergiert.

Lemma 12. *Für $\delta > \frac{1}{4}$ ist*

$$\sum_{n \leq x} a_3(n) n^{-\delta} = Z_3(\delta) + O(x^{\frac{1}{4}-\delta}).$$

Beweis. Für $\delta > \frac{1}{4}$ ist nach (6) und Lemma 11

$$\sum_{n \leq x} a_3(n) n^{-\delta} = Z_3(\delta) - \sum_{n > x} a_3(n) n^{-\delta} = Z_3(\delta) + O(A_3(x) x^{-\delta}) \\ + O\left(\sum_{n > x} n^{-\frac{3}{4}-\delta}\right) = Z_3(\delta) + O(x^{\frac{1}{4}-\delta}).$$

6. Nun beweisen wir endlich den

Satz 4. *Bezeichnet $a_0(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen Abelschen Gruppen der Ordnung n , so gilt für die summatorische Funktion*

$$(33) \quad A_0(x) = \sum_{n \leq x} a_0(n) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x).$$

Dabei sind

$$c_\mu = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^{\infty} \xi\left(\frac{v}{\mu}\right), \quad c_1 = 2, 29 \dots, \quad c_2 = -10 \cdot 1, 46 \dots, \quad c_3 = 10^2 \cdot 1, 14 \dots$$

Beweis. Nach (1), (5) und (6) ist

$$A_0(x) = \sum_{m n \leq x} a_2(m) a_3(n) = \sum_{n \leq x} a_3(n) A_2\left(\frac{x}{n}\right)$$

und daher nach Lemma 10

$$A_0(x) = \sum_{n \leq x} a_3(n) \left(\xi(2) \xi(3) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}} + \xi\left(\frac{1}{2}\right) \xi\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \xi\left(\frac{1}{3}\right) \xi\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \right) \\ + O\left(\sum_{n \leq x} a_3(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x\right).$$

Hieraus folgt mit Lemma 12

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \zeta(2) \zeta(3) x Z_3(1) + O(x^{\frac{1}{4}-1}) + \zeta(\tfrac{1}{2}) \zeta(\tfrac{3}{2}) x^{\frac{1}{2}} (Z_1(\tfrac{1}{2}) + O(x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}})) \\ &\quad + \zeta(\tfrac{1}{3}) \zeta(\tfrac{2}{3}) x^{\frac{1}{3}} (Z_3(\tfrac{1}{3}) + O(x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}})) + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x) \\ &= \zeta(2) (\zeta(3) Z_3(1) x + \zeta(\tfrac{1}{2}) \zeta(\tfrac{3}{2}) Z_3(\tfrac{1}{2}) x^{\frac{1}{2}} + \zeta(\tfrac{1}{3}) \zeta(\tfrac{2}{3}) Z_3(\tfrac{1}{3}) x^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + O(x^{\frac{3}{10}} \log^{\frac{9}{10}} x)), \end{aligned}$$

woraus nach (6) und (8) die Behauptung folgt.

Zur Qualität des in (33) auftretenden Fehlergliedes sei noch folgendes erwähnt. Hat man im Fehlerglied von Satz 3, abgesehen von einem möglichen Logarithmusfaktor, statt $x^{\frac{2}{9}}$ allgemein x^{d_1} , $d_1 > 0$, erhalten, so folgt mit unserer Schlußweise für das Fehlerglied in (33), wiederum abgesehen von einem möglichen Logarithmusfaktor, statt $x^{\frac{3}{10}}$ allgemein x^{d_2} , $d_2 = \frac{1}{4-3d_1}$, so daß man mit unserer Methode in (33) nur ein Fehlerglied mit $d_2 > \frac{1}{4}$, ja sogar mit $d_2 \geq \frac{2}{7} > \frac{1}{4}$, da ja Lemma 8 nur $d_1 \geq \frac{1}{6}$ liefert, erreichen kann. Im übrigen ist $d_2 = \frac{1}{4}$, genauer

$$A_0(x) = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{1}{3}} + c_4 x^{\frac{1}{4}} + o(x^{\frac{1}{4}})$$

zu erwarten.

(Eingegangen am 15. Dezember 1951.)

Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von

S. D. Puppe in Heidelberg.

Einleitung.

Für das Isotopieproblem der Knotentheorie wurden bisher zwei Methoden mit Erfolg angewandt, um die Verschiedenheit von Knoten mit gleicher Knotengruppe, insbesondere von einander spiegelbildlichen Knoten, nachzuweisen. Die erste, auf GOERITZ [1]¹⁾ zurückgehende Methode beruht auf den MINKOWSKISCHEN Einheiten der quadratischen Form eines Knotens, die zweite benutzt die von SEIFERT [5] eingeführten Verschlingungsinvarianten von Überlagerungen des Knotenaußenraumes. Es sind Beispiele bekannt, bei denen die Unterscheidung zweier Knoten durch die Verschlingungsinvarianten möglich ist, während ihre MINKOWSKISCHEN Einheiten übereinstimmen (SEIFERT [6] S. 92). Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zu zeigen, daß das Umgekehrte nicht möglich ist, sondern daß die MINKOWSKISCHEN Einheiten durch die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt sind und sich aus ihnen berechnen lassen.

Kapitel I.

Minkowskische Einheiten.

§ 1.

Zahlentheoretische Hilfsmittel.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Definitionen und Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. Die Beweise findet man in den entsprechenden Lehrbüchern (vgl. etwa LANDAU [2]). Sofern nichts Besonderes gesagt ist, sind die auftretenden Größen ganze Zahlen oder ganzzahlige Matrizen.

Ist p eine Primzahl $\neq 2$ und $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, so ist das LEGENDREsche Restsymbol definiert durch

$$(1) \quad \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv x^2 \pmod{p} \text{ lösbar ist,} \\ -1, & \text{wenn das nicht der Fall ist.} \end{cases}$$

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Es gilt dann:

$$(2) \quad \left(\frac{n_1 \cdot n_2}{p} \right) = \left(\frac{n_1}{p} \right) \cdot \left(\frac{n_2}{p} \right).$$

$$(3) \quad \text{Aus } n_1 \equiv n_2 \pmod{p} \text{ folgt } \left(\frac{n_1}{p} \right) = \left(\frac{n_2}{p} \right).$$

Ist $n > 0$, $A = (a_{\nu\mu})$ eine symmetrische quadratische Matrix und $x = (x_\nu)$ eine variable Spalte, so heißt

$$(4) \quad G_n(A) = \sum_{x \bmod n} e^{\frac{2\pi i}{n} x' A x}$$

die GAUSSSCHE Summe von A (bzw. von der durch A bestimmten quadratischen Form $x' A x$) zum Modul n . Bei der Summation sollen die x_ν unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod n durchlaufen, also etwa die Zahlen von 0 bis $n-1$.

Sätze und Formeln über GAUSSSCHE Summen:

Geht B aus A durch unimodulare Transformation hervor, d. h. ist $S' A S = B$ mit $|S| = \pm 1$, so gilt

$$(5) \quad G_n(A) = G_n(B).$$

$$(6) \quad \text{Ist } A \equiv B \pmod{n}, \text{ so gilt } G_n(A) = G_n(B).$$

$$(7) \quad \text{Für } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ gilt } G_n(A) = G_n(A_1) \cdot G_n(A_2).$$

Für $t > t' \geq 0$ ist

$$(8) \quad G_{p^t}(p^{t'} a) = G_{p^{t-t'}}(a) \cdot p^{t'},$$

wo a als einreihige Matrix aufzufassen ist und p wieder eine Primzahl $\neq 2$ bedeutet.

Wenn $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so gilt weiter

$$(9) \quad G_{p^t}(a) = \begin{cases} p^{\frac{t}{2}}, & t \equiv 0 \pmod{2} \\ p^{\frac{t-1}{2}} \cdot G_p(a), & t \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

$$(10) \quad G_p(a) = \left(\frac{a}{p} \right) G_p(1),$$

$$(11) \quad G_p(1) = \varphi(p) \cdot \sqrt{p} \text{ mit } \varphi(r) = \begin{cases} 1, & r \equiv 1 \pmod{4} \\ i, & r \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

§ 2.

Minkowskische Einheiten einer quadratischen Form.

Bei MINKOWSKI [3] wird einer quadratischen Form für jede Primzahl p eine Zahl $C_p = \pm 1$ zugeordnet, und es wird gezeigt, daß diese Zahlen gegenüber rationalen Transformationen invariant sind. Für die Anwendung in der Knotentheorie scheidet C_2 ganz aus, und es genügt zu wissen, daß die anderen C_p gegenüber unimodularen Trans-

formationen invariant sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns von vornherein auf den Fall $p \neq 2$ und den Nachweis der letztgenannten Eigenschaft.

Sei A eine ganzzahlige symmetrische Matrix mit $|A| \neq 0$. Wir bezeichnen mit $m = m(A)$ die Reihenzahl von A und (für eine Primzahl $p \neq 2$) mit $\omega = \omega_p(A)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von $|A|$. t sei in folgendem immer eine gerade Zahl > 0 , und unter $\varphi(r)$ ist die in (11) definierte Funktion zu verstehen. Es wird dann zunächst die Zahl

$$(12) \quad C_p^t(A) = \frac{1}{\varphi(p^\omega)} \cdot p^{-\frac{1}{2}(mt + \omega)} \cdot G_{p^t}(A)$$

eingeführt. Aus (5) entnimmt man, daß $C_p^t(A)$ bereits eine Invariante gegenüber unimodularen Transformationen von A ist; denn es ist $|A|$, damit $\omega_p(A)$ und offenbar auch $m(A)$ invariant. Ferner folgt für zwei Matrizen A, B mit gleicher Reihenzahl aus $A \equiv B \pmod{p^v}$ die gleiche Kongruenz für die Determinanten: $|A| \equiv |B| \pmod{p^v}$. Daraus ergibt sich $\omega(A) = \omega(B)$ für $v > \omega(A)$, und wenn auch $v \geq t$ gilt, ist nach (6) $C_p^t(A) = C_p^t(B)$. $C_p^t(A)$ ist also zweitens invariant bei Ersetzung von A durch eine mod p^r kongruente Matrix, vorausgesetzt daß r genügend groß ist. Diese beiden Eigenschaften gestatten es, den allgemeinen Fall auf den Fall, daß A eine Diagonalmatrix ist, zurückzuführen. Dadurch wird die Abhängigkeit von dem Parameter t in natürlicher Weise beseitigt und ein einfaches Berechnungsverfahren für die C_p^t angegeben werden können. Es dient dazu folgender

Hilfssatz 1. Für jedes $v > 0$ gibt es eine unimodulare Matrix S , so daß

$$S'AS \equiv D \pmod{p^v}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Für $m(A) = 1$ ist nichts zu beweisen, sei also $m(A) > 1$. Ist $A = p^r \cdot \bar{A}$ und leistet S für $\bar{A}$ das Geforderte, so auch für A , es genügt also, den Nachweis für $A \not\equiv 0 \pmod{p}$ zu führen. Man kann annehmen, daß es in der Hauptdiagonale von A ein Element $a_{rr} \not\equiv 0 \pmod{p}$ gibt; denn andernfalls betrachte man irgendein nicht durch p teilbares Element $a_{\nu\mu}$. Addiert man die μ -te Spalte zur ν -ten und dann die μ -te Zeile zur ν -ten (das ist eine unimodulare Transformation), so wird $a_{\nu\nu}$ durch $a_{\nu\nu} + 2a_{\nu\mu} + a_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ersetzt²⁾. Demnach kann a_{11} , falls es nicht schon selbst prim zu p ist, immer durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in ein nicht durch p teilbares Element übergeführt werden. Dies wird als geschehen angenommen. Addiert man dann die mit x multiplizierte erste Spalte zur k -ten und anschließend die mit x multiplizierte erste Zeile zur k -ten ($k > 1$), so tritt $a_{11} \cdot x + a_{1k}$ an die Stelle von a_{1k} und a_{k1} ($= a_{1k}$). Wird für x

²⁾ An dieser Stelle geht die Voraussetzung $p \neq 2$ entscheidend ein.

eine Lösung von $a_{11} \cdot x + a_{1k} \equiv 0 \pmod{p^r}$ gewählt und der Prozeß für alle $k > 1$ durchgeführt, so erhält man

$$\bar{S}' A \bar{S} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \pmod{p^v} \text{ mit unimodularem } \bar{S}.$$

Durch Induktionsschluß folgt die Behauptung.

Für eine Diagonalmatrix kann C_p^t mit Hilfe der Formeln (7)–(11) explizit berechnet werden. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 2. Ist $D = (c_v p^{\omega_v} \delta_{v\mu})$, $c_v \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $t > \text{Max } \omega_v$, so ist

$$(13) \quad C_p^t(D) = \varrho \prod_{\omega_v \equiv 1 \pmod{2}} \left(\frac{c_v}{p} \right)$$

mit

$$(14) \quad \varrho = \frac{\varrho(p)^\lambda}{\varrho(p^\omega)} = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2} \right]}}{p} \right)$$

$\omega = \omega(D) = \sum_v \omega_v$, $\lambda = \text{Anzahl der ungeraden } \omega_v$ ($\delta_{v\mu}$ ist hier das KRONECKER-Symbol, und $[r]$ bedeutet die größte ganze Zahl $\leq r$).

Beweis.

$$G_{p^t}(D) = \prod_v G_{p^t}(c_v p^{\omega_v}) = \prod_v G_{p^{t-\omega_v}}(c_v) p^{\omega_v} \quad \text{nach (7) u. (8)}$$

$$= \prod_{\omega_v \equiv 0 \pmod{2}} p^{\frac{1}{2}(t+\omega_v)} \cdot \prod_{\omega_v \equiv 1 \pmod{2}} G_p(c_v) p^{\frac{1}{2}(t+\omega_v-1)} \quad \text{nach (9)}$$

$$= p^{\frac{1}{2}(mt+\omega)} \cdot \varrho(p)^\lambda \cdot \prod_{\omega_v \equiv 1 \pmod{2}} \left(\frac{c_v}{p} \right). \quad \text{nach (10) u. (11)}$$

Nach Definition von C_p^t ist das schon die Behauptung, wobei für ϱ der erste der beiden angegebenen Ausdrücke steht; die Übereinstimmung mit dem zweiten bestätigt man durch Fallunterscheidung.

Offenbar ist $C_p^t(D)$ unabhängig von t für alle $t > \text{Max } \omega_v$. Zusammen mit dem Hilfssatz 1 folgt daraus allgemein

Hilfssatz 3. Für beliebiges A ist $C_p^t(A)$ unabhängig von t für alle $t > \omega(A)$.

Beweis. Ist $t_i > \omega(A)$, $i = 1, 2$, so gibt es nach Hilfssatz 1 eine Diagonalmatrix D , so daß $S'AS = D \pmod{p^{t_1+t_2}}$ gilt mit unimodularem S . Nach den Bemerkungen im Anschluß an (12) ist $C_p^{t_1}(A) = C_p^{t_1}(D)$; $C_p^{t_1}(D)$ und $C_p^{t_2}(D)$ stimmen aber wie eben gezeigt überein (da $t_i > \omega(A) = \omega(D) \geq \text{Max } \omega_v$ ist).

Dieses Ergebnis berechtigt zu der endgültigen Definition:

$$C_p(A) = C_p^t(A) \text{ mit } t > \omega(A).$$

$C_p(A)$ wird die MINKOWSKISCHE Einheit von A zur Primzahl p genannt. (Daß $C_p(A)$ tatsächlich eine Einheit, d. h. $= \pm 1$ ist, folgt aus Hilfssatz 2 zusammen mit Hilfssatz 1.)

Es ist klar, wie sich die Eigenschaften von $C_p(A)$ auf $C_p(A)$ übertragen. Wir fassen nochmals zusammen:

Satz 1. $C_p(A)$ ist invariant gegenüber unimodularen Transformationen von A und für hinreichend großes v gegenüber Ersetzung von A durch eine mod p^v kongruente Matrix. Dabei genügt es, daß $v \geq t_0$ gilt, wo t_0 die kleinste gerade Zahl $> \omega(A)$ ist.

Satz 2. Man kann $C_p(A)$ berechnen, indem man mit $v \geq t_0$ nach Hilfssatz 1 ein $D = (C_p(p^{v_1} \delta_{v_1}) \dots S' A S \pmod{p^v})$ bestimmt, und man erhält

$$C_p(A) = C_p(D) = \varrho \prod_{\omega_v \equiv 1 \pmod{2}} \left(\frac{c_v}{p} \right)$$

(vgl. (13) und (14)), speziell

$$C_p(A) = 1 \text{ für } |A| \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Von entscheidender Bedeutung in der Knotentheorie ist ferner

Satz 3. Ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $\omega_p(A_i) = \omega_i$, so gilt

$$C_p(A) = (-1)^{\frac{1}{4}(p^{\omega_1}-1)(p^{\omega_2}-1)} \cdot C_p(A_1) \cdot C_p(A_2),$$

speziell $C_p(A) = C_p(A_1)$ für $|A_2| \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Beweis. Mit $m(A_i) = m_i$ und genügend großem t gilt nach der Definition von C_p

$$\begin{aligned} C_p(A) &= \frac{1}{\varrho(p^{\omega})} \cdot p^{-\frac{1}{2}((m_1+m_2)t + (\omega_1+\omega_2))} \cdot G_{p^t}(A_1) \cdot G_{p^t}(A_2) \quad (\text{vgl. (7)}) \\ &= \frac{\varrho(p^{\omega_1}) \cdot \varrho(p^{\omega_2})}{\varrho(p^{\omega_1+\omega_2})} \cdot C_p(A_1) \cdot C_p(A_2). \end{aligned}$$

Durch Fallunterscheidung erkennt man die Übereinstimmung dieses Koeffizienten mit dem in der Behauptung angegebenen. Die spezielle Folgerung ergibt sich sofort, wenn man $C_p(A_2) = 1$ und $\omega_2 = 0$ beachtet.

Wir zeigen zum Schluß, daß diese Definition von C_p mit der bei GOERITZ [1] und REIDEMEISTER [4] (S. 28) übereinstimmt, die durch folgende Vorschrift gegeben ist:

Man transformiere A rational in $B \equiv \bar{D} \pmod{p^2}$ mit

$$(16) \quad \bar{D} = (\bar{d}_v \delta_{vv})_2, \quad \bar{d}_v = \begin{cases} \bar{c}_v, & v \leq m - \lambda \\ \bar{c}_v p, & v > m - \lambda, \end{cases} \quad \bar{c}_v \not\equiv 0 \pmod{p}$$

und setze

$$(17) \quad C_p(A) = C_p(\bar{D}) = \left(\frac{(-1)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor}}{p} \right) \cdot \prod_{v=m-\lambda+1}^m \left(\frac{\bar{c}_v}{p} \right).$$

Für den Beweis, daß diese Vorschrift immer ausführbar ist und zu keinen Widersprüchen führt, wird auf MINKOWSKI [3] verwiesen.

Wir erhalten hier nach Satz 2

$$(18) \quad C_p(A) = C_p(D) = \left(\frac{(-1)^{\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor}}{p} \right) \cdot \prod_{v=m-\lambda+1}^m \left(\frac{c_v}{p} \right),$$

wenn $S'AS \equiv D \pmod{p^{\omega+2}}$, $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu})$ ist und wenn man die offenbar erlaubte Annahme macht, daß gerade die letzten $\omega_\nu \equiv 1 \pmod{2}$ sind. Setzt man

$$R = (p^{-\left\lfloor \frac{\omega_\nu}{2} \right\rfloor} \delta_{\nu\mu}),$$

so ergibt sich aus A durch rationale Transformation

$$B = R'S'ASR.$$

Es ist $B \equiv \bar{D} \pmod{p^2}$, wo $\bar{D}$ die in (16) geforderte Gestalt hat. Die dort angegebene Vorschrift (17) liefert mit diesem $\bar{D}$ gerade dasselbe wie (18).

§ 3.

Die quadratische Form eines Knotens.

Unter einer Knotenlinie wird hier ein geschlossenes, doppelpunkt-freies, orientiertes Polygon in dem (durch einen unendlich fernen Punkt) zur 3-Sphäre S^3 geschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 verstanden. Dabei sei in R^3 eine bestimmte Orientierung festgelegt. Zwei Knotenlinien heißen isotop, wenn sie durch kombinatorische Deformationen (REIDEMEISTER [4]) ineinander übergeführt werden können. Ein Knoten ist eine Isotopieklasse von Knotenlinien.

Ist $\mathfrak{k}$ eine Knotenlinie, so betrachten wir Projektionen von $\mathfrak{k}$ auf Ebenen E von R^3 , die so orientiert werden, daß sie zusammen mit der Projektionsrichtung einen fest vorgegebenen Schraubsinn im R^3 bestimmen. Eine solche Projektion heißt regulär (REIDEMEISTER [4]), wenn die Doppelpunkte des entstehenden Polygons $\pi(\mathfrak{k})$ höchstens zweifach sind und inneren Punkten der Kanten von $\mathfrak{k}$ entsprechen:

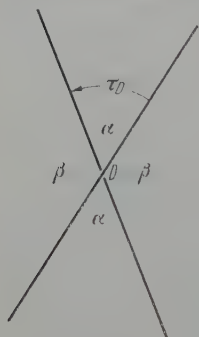


Fig. 1.

ihre Anzahl ist dann sicher endlich. Es gibt zu jeder Knotenlinie reguläre Projektionen. $\pi(\mathfrak{k})$ heißt normiert, wenn bei jedem Doppelpunkt D der überkreuzende Bogen gekennzeichnet ist.

Einer regulären normierten Knotenprojektion wird nach GOERITZ [1] folgendermaßen eine symmetrische Matrix und damit eine quadratische Form zugeordnet:

Die Gebiete, in die E durch $\pi(\mathfrak{k})$ zerlegt wird, lassen sich auf genau eine Weise so in zwei Klassen α und β einteilen, daß zwei Gebiete derselben Klasse höchstens Doppelpunkte von $\pi(\mathfrak{k})$ als gemeinsame Randpunkte haben. Es sei α die Klasse, zu der das Außengebiet G_0 von $\pi(\mathfrak{k})$ gehört; die übrigen α -Gebiete werden mit $G_1, \dots, G_h$ bezeichnet. In einem Doppelpunkt D von $\pi(\mathfrak{k})$ stoßen vier Gebiete aneinander (Fig. 1), von denen je zwei gegenüberliegende zur gleichen Klasse gehören (sie sind nicht notwendig

voneinander verschieden). Ist τ_D die Drehung um D , die die überkreuzende Strecke so in die unterkreuzende überführt, daß sie dabei in der Umgebung von D nur die α -Gebiete überstreicht, so wird definiert:

$$\eta(D) = \begin{cases} 0, & \text{wenn in } D \text{ ein } \alpha\text{-Gebiet an sich anstößt,} \\ +1 \text{ oder } -1 & \text{je nachdem, ob } \tau_D \text{ in } E \text{ positiv oder negativ} \\ & \text{ist, wenn die beiden } \alpha\text{-Gebiete verschieden sind.} \end{cases}$$

Mit $q_{ii} = \sum \eta(D)$, summiert über alle mit G_i inzidenten D ,

$$q_{ik} = \sum -\eta(D), \text{ summiert über alle zugleich mit } G_i \text{ und } G_k \text{ inzidenten } D (i \neq k),$$

ist $Q = (q_{ik})$, $i, k = 1, \dots, h$ die gesuchte Matrix.

Es läßt sich zeigen (GOERTZ [1]), daß man die Veränderungen von Q , die der Übergang zu einer anderen Projektion von $\mathfrak{k}$ oder zu einer isotopen Knotenlinie bewirkt, durch geeignete Verknüpfung von Operationen der folgenden Art erhalten kann:

$$1. \quad Q \text{ geht über in } \bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \text{ mit } |Q_1| = \pm 1,$$

$$2. \quad Q \text{ geht über in } \bar{Q} = S' Q S \text{ mit unimodularem } S.$$

Ferner ist immer

$$|Q| \neq 0^3).$$

Nach § 2 ist also $C_p(Q)$ definiert, und aus den Sätzen 1 und 3 ergibt sich, daß bei den obigen Operationen

$$C_p(Q) = C_p(\bar{Q})$$

gilt. $C_p(Q)$ ist daher eine Knoteninvariante. Wir nennen sie MINKOWSKISCHE Einheit oder auch MINKOWSKISCHE Invariante des Knotens.

Kapitel II.

Verschlingungsinvarianten.

§ 1.

Abstrakte Gruppen mit Verschlingung.

Im Anschluß an SEIFERT [5] wird der Begriff einer Gruppe mit Verschlingung eingeführt. Die Anwendung dieses Begriffs auf die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (§ 2) liefert die Verschlingungsinvarianten.

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche ABELSche Gruppe. Wir nennen ein Erzeugendensystem $b = (b_i)$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der von den b_i erzeugten zyklischen Untergruppen ist und wenn für die Ordnungen c_i von b_i gilt $c_{i+1} \equiv 0 \pmod{c_i}$. Die Zahlen c_i sind dann bekanntlich durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. Sie mögen (im Hinblick auf die topologische Anwendung) als Torsionskoeffizienten bezeichnet werden.

³⁾ Tatsächlich ist $|Q|$ sogar immer ungerade.

Definition. $\mathfrak{G}$ heißt Gruppe mit Verschlingung — oder kürzer V-Gruppe —, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche ABELSche Gruppe ist und wenn für $a, b \in \mathfrak{G}$ eine Funktion $V(a, b)$ definiert ist, deren Werte Klassen rationaler Zahlen mod 1 sind und die folgenden Axiomen genügt:

$$V_1: V(a, b) = V(b, a)$$

$$V_2: V(a + b, c) = V(a, c) + V(b, c)$$

V_3 : Es gibt zwei Basen $(b_i), (\bar{b}_i)$ von $\mathfrak{G}$, genannt duale Basen, so daß

$$V(b_i, \bar{b}_k) = \frac{1}{c_i} \delta_{ik}$$

ist, wo c_i die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{G}$ sind⁴⁾. Dabei bedeutet r für rationales r die Klasse mod 1.

Einige einfache Folgerungen sind:

$$(1) \quad V(c, a + b) = V(c, a) + V(c, b),$$

$$(2) \quad V(0, a) = V(a, 0) = \bar{0}.$$

Sind α und β die Ordnungen von a bzw. b und bezeichnet (α, β) ihren größten gemeinsamen Teiler, so gilt

$$(3) \quad (\alpha, \beta) \cdot V(a, b) = \bar{0}.$$

Beweis. (1) und (2) ergeben sich unmittelbar aus V_1 und V_2 . Bei (3) ist nach (2) $\alpha \cdot V(a, b) = \beta \cdot V(a, b) = \bar{0}$, und da (α, β) sich als ganzzahlige Linearkombination von α und β darstellen läßt, folgt die Behauptung.

Das Ergebnis von SEIFERT [5] ist die folgende Charakterisierung der möglichen Verschlingungen (V-Gruppen-Strukturen) einer endlichen ABELSchen Gruppe $\mathfrak{G}$. Die hier nicht ausgeführten Beweise findet man in dieser Arbeit.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Verschlingung. Wir zerlegen $\mathfrak{G}$ in eine direkte Summe von Primzahlpotenzgruppen (d. h. von Gruppen, deren Elemente nur Potenzen einer festen Primzahl als Ordnung haben), was bekanntlich — abgesehen von der Reihenfolge — auf genau eine Weise möglich ist. Sei p eine Primzahl $\neq 2$ und $\mathfrak{G}_p$ die zugehörige Gruppe dieser Zerlegung. Ihre Torsionskoeffizienten haben die Form p^{e_i} , wobei etwa

$$(4) \quad 0 < e_1 = \dots = e_{r_1} < e_{r_1+1} = \dots = e_{r_2} < e_{r_2+1} = \dots < \dots = e_{r_r}$$

⁴⁾ V_3 ist äquivalent mit der vom algebraischen Standpunkt einfacheren Forderung (vgl. [8], [9])

V_3' : Zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein b , so daß $V(a, b) \neq \bar{0}$.

Hier wurde trotzdem V_3 vorgezogen, um die Darstellung möglichst eng an SEIFERT [5] anschließen zu können und weil bei der Torsionsgruppe einer Mannigfaltigkeit der POINCARÉ-VEBLENsche Dualitätssatz direkt auf V_3 führt (vgl. II § 2). Übrigens ist V_3 bzw. V_3' nur für den Beweis von (6) erforderlich.

gilt. Ist (b_i) eine Basis von $\mathfrak{G}_p$ und $(V(b_i, b_k)) = \bar{M}$, M eine rationale Matrix, so unterteilen wir M den Zahlen $v_1, \dots, v_r$ entsprechend in Teilmatrizen und erhalten nach (3)

$$(5) \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} p^{-e_{v_1}} & M_{12} p^{-e_{v_1}} & \dots & M_{1r} p^{-e_{v_1}} \\ M_{21} p^{-e_{v_1}} & M_{22} p^{-e_{v_2}} & \dots & M_{2r} p^{-e_{v_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r1} p^{-e_{v_1}} & M_{r2} p^{-e_{v_2}} & \dots & M_{rr} p^{-e_{v_r}} \end{bmatrix},$$

wo die M ganzzahlig sind. Wegen V_1 ist $\bar{M}$ symmetrisch, man kann daher dasselbe von M annehmen.

Aus V_3 läßt sich

$$(6) \quad |M_{ii}| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

folgern, und eine Untersuchung der möglichen Basen von $\mathfrak{G}_p$ lehrt

Hilfssatz 4. *Der quadratische Restcharakter von $|M_{ii}|$ bezüglich p , also die Zahl*

$$\left(\frac{|M_{ii}|}{p} \right)$$

ist unabhängig von der speziellen Basis (b_i) und unabhängig von der Wahl von M allein durch die Struktur der V-Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Dementsprechend werden einer V-Gruppe $\mathfrak{G}$ Verschlingungsinvarianten v_{p^e} zugeordnet durch die

Definition.

$$v_{p^e}(\mathfrak{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p^e \text{ nicht unter den Torsionskoeffizienten} \\ & \text{von } \mathfrak{G}_p \text{ vorkommt,} \\ \left(\frac{|M_{ii}|}{p} \right), & \text{wenn } e = e_{v_i} \text{ (wo } e_{v_i} \text{ und } M_{ii} \text{ nach (5) bestimmt} \\ & \text{wird).} \end{cases}$$

Durch diese Größen ist die Struktur von $\mathfrak{G}$ tatsächlich in gewissem Sinn bestimmt; es gilt nämlich

Satz 4. *Ist $\mathfrak{G}$ eine V-Gruppe, die keine Elemente der Ordnung 2 enthält, so ist ihre Struktur durch die gewöhnliche Gruppenstruktur und durch die Verschlingungsinvarianten eindeutig bestimmt.*

Wir werden von diesem Satz keinen Gebrauch machen und gehen deshalb nicht auf seinen Beweis ein. Es sei jedoch bemerkt, daß der folgende Hilfssatz, den wir hier mit Rücksicht auf eine Anwendung in Kapitel III ableiten, einen wichtigen Schritt zu diesem Beweis darstellt (vgl. [5] S. 821 f.).

Hilfssatz 5. *Ist $b = (b_i)$ irgendeine Basis von $\mathfrak{G}_p$, so kann man eine Basis $\bar{b} = (\bar{b}_i)$ finden, die mit b durch eine unimodulare Matrix Γ zusammenhängt, $\bar{b} = \Gamma b$, und für die*

$V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \bar{D}$ mit $D = \text{Diagonalmatrix}$, also $D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik})$, gilt.

Beweis. b wird schrittweise in $\bar{b}$ übergeführt durch folgende Operationen:

1. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + b_\mu$ ersetzt mit $\mu < \nu$.
2. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + p^{e_\mu - e_\nu} b_\mu$ ersetzt mit $\mu > \nu$.
3. b_i bleibt für $i \neq \nu, \mu$, b_ν und b_μ werden vertauscht mit solchem ν, μ , daß $e_\nu = e_\mu$, daß also ν und μ in demselben Intervall (ν_i, ν_{i+1}) liegen.

Jede dieser Operationen führt b wieder in eine Basis über, und die zugehörigen Matrizen Γ sind unimodular. Ist $(V(b_i, b_k)) = \tilde{M}$, so erhält man aus M entsprechende Matrizen für die neuen Basen, indem man bei 1. nacheinander die μ -te Spalte zur ν -ten und die μ -te Zeile zur ν -ten addiert,

bei 2. die mit $p^{e_\mu - e_\nu}$ multiplizierte μ -te Spalte und Zeile (analog 1.) zur ν -ten addiert,

bei 3. die ν -te und μ -te Zeile und Spalte miteinander vertauscht.

Sei nun M gemäß (5) zerlegt (und symmetrisch). Gibt es in $M_{11} = (m_{ik})$ ein $m_{ii} \not\equiv 0 \pmod{p}$, so kann man es durch die Operation 3. an die Stelle von m_{11} bringen; andernfalls gibt es wegen (6) ein $m_{\mu\mu} = m_{1\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$, und die Anwendung der Operation 2. mit $\nu = 1$ bringt $m_{11} + 2m_{1\mu} + m_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ an die Stelle von m_{11} . Man kann also $m_{11} \not\equiv 0 \pmod{p}$ annehmen. x -maliges Anwenden von 1. mit $\mu = 1$ sukzessiv für alle $\nu > 1$ führt bei geeigneter Wahl von x die Matrix M in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} m_{11} p^{-e_1} & G \\ G & M^* \end{pmatrix}$$

über, wo G ganzzahlig ist und M^* wieder die Eigenschaften von M besitzt. Durch Induktionsschluß folgt, daß M mit Hilfe der Operationen 1. bis 3. in ein $\bar{M} = D \pmod{1}$ mit $D = \text{Diagonalmatrix}$ überführbar ist. Die Basis $\bar{b}$, zu der man auf diese Weise gelangt, hat offenbar die geforderten Eigenschaften.

§ 2.

Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ als Gruppe mit Verschlingung.

Sei $\mathfrak{M}^3$ eine dreidimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Um in ihrer Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ der Dimension 1 eine Verschlingung im Sinne von § 1 dieses Kapitels einzuführen, sei daran erinnert, daß zwei punktfremden divisions-nullhomologen singulären 1-Ketten A^1, B^1 in $\mathfrak{M}^3$ eine rationale Zahl $V(A^1, B^1)$ als Verschlingungszahl zugeordnet ist (SEIFERT-THRELFALL [7] S. 277). Für diese Zahlen gilt:

1. $V(A^1, B^1) = V(B^1, A^1)$.
2. $V(A^1 + B^1, C^1) = V(A^1, C^1) + V(B^1, C^1)$.
3. Es gibt in $\mathfrak{M}^3$ zwei Torsionsbasen (B_i^1) und $(\bar{B}_i^1)$, so daß $V(B_i^1, \bar{B}_k^1) = \frac{1}{c_i} \delta_{ik}$ gilt, mit $c_i = \text{Ordnung von } B_i^1 \text{ und } \bar{B}_i^1$. (Diese Eigenschaft ist ein Teil des POINCARÉ-VEBLENSCHEN Dualitätssatzes, vgl. [7] S. 253).
4. Aus $A^1 \sim 'A^1$ und $B^1 \sim 'B^1$ folgt $V(A^1, B^1) \equiv V('A^1, 'B^1) \pmod{1}$.
Danach ist klar, daß die Festsetzung

$$V(a, b) = \overline{V(A^1, B^1)},$$

wo $a, b \in \mathfrak{T}^1$ und A^1, B^1 punktfremde Repräsentanten von a bzw. b sind, die Gruppe $\mathfrak{T}^1$ zu einer V-Gruppe macht: die Eigenschaft 4. sichert die Eindeutigkeit der Definition, und 1. bis 3. liefert die Axiome V_1 — V_3 .

Die V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ ist allein durch die topologische Struktur und die Orientierung von $\mathfrak{M}^3$ definiert; also sind die Verschlingungsinvarianten $v_p(\mathfrak{T}^1)$ zugleich Invarianten der orientierten Mannigfaltigkeit. Insbesondere gilt das für den Fall, daß $\mathfrak{M}^3$ eine Überlagerung des Außenraumes einer Knotenlinie $\mathfrak{K}$ in einer 3-Sphäre S^3 ist. Da die kombinatorischen Knotendeformationen durch orientierungserhaltende topologische Abbildungen der S^3 auf sich bewirkt werden können, sind die v_p auch Invarianten des Knotens.

Nach SEIFERT [6] können die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen berechnet werden, und zwar erhält man ([6] S. 100) für die zweifache Überlagerung $\mathfrak{M}_2^3$ den

Satz 5. *Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ von $\mathfrak{M}_2^3$ besitzt ein Erzeugendensystem $q = (q_i)$ mit den definierenden Relationen $Qq = 0$ und der Verschlingung $(V(q_i, q_k)) = \varepsilon Q^{-1}$, wobei Q die Matrix einer quadratischen Form des Knotens ist. ε ist $+1$ oder -1 , je nachdem wie sich die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ zu dem bei der Definition von Q zugrundegelegten Schraubsinn (I § 3) verhält.*

Dieses Ergebnis weist deutlich auf einen engen Zusammenhang hin zwischen den Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{M}_2^3$ und den MINKOWSKISCHEN Einheiten, eine Vermutung, die in dem nun folgenden Kapitel III bestätigt wird.

Kapitel III.

Bestimmung der Minkowskischen Einheiten aus den Verschlingungsinvarianten der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes.

Anknüpfend an den Schluß des vorigen Kapitels, wählen wir die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ so, daß in Satz 5 $\varepsilon = +1$ wird. Dann liegt folgendes Problem vor:

Gegeben ist eine V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ durch ($|Q| \neq 0$)

$$(1) \quad q = (q_i), \quad i = 1, \dots, h, \quad Qq = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \tilde{Q}^{-1}.$$

Es sollen die $C_p(Q)$ aus den $v_{pe}(\mathfrak{T}^1)$ berechnet werden.

Erster Schritt. Vereinfachung durch Einführung eines neuen Erzeugendensystems.

Sei

$$\mathfrak{T}^1 = \sum_{j=1}^s \mathfrak{T}_{p_j}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{T}^1$ in Primzahlpotenzgruppen. Wir bezeichnen mit P diejenige Matrix, die in der Hauptdiagonale der Reihe nach die Torsionskoeffizienten der $\mathfrak{T}_{p_j}$ und sonst lauter Nullen enthält. Mit geeigneten Einheitsmatrizen E kann man erreichen, daß

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_1 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

gleiche Reihenzahl m haben. Die von 1 verschiedenen Elementarteiler von P und Q sind die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}^1$, also haben Q_1 und P_1 gleiche Elementarteiler, und es gibt unimodulare Matrizen R, S , so daß

$$(2) \quad Q_1 = R P_1 S$$

ist.

Kommt die Primzahl p , für die C_p berechnet werden soll, unter den p_j nicht vor, so ist $|Q| = \pm |P| \equiv 0 \pmod{p}$, also nach Satz 2

$$C_p(Q) = 1.$$

Wir schließen diesen Fall von jetzt ab aus und können $p = p_1$ annehmen.

Ergänzt man q formal zu einer m -zeiligen Spalte q^1 , so ist dieselbe V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ gegeben durch

$$(3) \quad q^1 = (q_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad Q_1 q^1 = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \tilde{Q}_1^{-1}$$

und, wenn $b^1 = S q^1$ gesetzt wird (S nach (2) bestimmt), auch durch

$$(4) \quad b^1 = (b_i), \quad P_1 b^1 = 0, \quad (V(b_i, b_k)) = S \tilde{Q}_1^{-1} S'.$$

Nach Definition von P_1 bilden die ersten b_i — die entsprechende Teilspalte von b^1 sei $b = (b_i)$, $i = 1, \dots, n_p$ — eine Basis von $\mathfrak{T}_{p_1} = \mathfrak{T}_p$.

Nach Hilfssatz 5 gibt es ein unimodulares I' , so daß für die Basis $\bar{b} = I' b$ gilt

$$(5) \quad (V(\bar{b}_i, \bar{b}_k)) = \tilde{D}, \quad D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n_p,$$

wo p^{e_i} die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}_p$ sind. Hieraus wird $v_{pe}(\mathfrak{T}^1)$ bestimmt. Es ist nach Definition

$$(6) \quad v_{p^{e_{v_i}}} = \prod_{j=v_i-1+1}^{v_i} \left(\frac{d_j}{p} \right) \quad \text{und} \quad v_{pe} = 1 \quad \text{für} \quad e \neq e_{v_i}, \quad i = 1, \dots, r,$$

wenn wie in II (4) $0 < e_1 = \dots = e_{v_1} < e_{v_1+1} < \dots < e_{v_r}$ und $v_0 = 0$ ist.

Andererseits wird

$$I_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

so gebildet, daß I_1 m -reihig wird, und $I_1 b^1 = \bar{b}^1 = (\bar{b}_i)$ gesetzt. Dann ist

$$(7) \quad V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \tilde{M}_1$$

mit

$$(8) \quad M_1 = I_1 S Q_1^{-1} S' I_1', \quad \text{d. h.} \quad M_1^{-1} = I_1'^{-1} S'^{-1} Q_1 S^{-1} I_1^{-1},$$

und nach den Sätzen 3 und 1 folgt

$$(9) \quad C_p(Q) = C_p(Q_1) = C_p(M_1^{-1}).$$

Damit ist das Problem auf die Berechnung von $C_p(M_1^{-1})$ reduziert.

Zweiter Schritt. Untersuchung von M_1^{-1} .

Unterteilt man M_1 zwischen der n_p -ten und $n_p + 1$ -ten Zeile und Spalte, so ergibt sich

$$(10) \quad M_1 = \begin{pmatrix} M & G \\ G & N \end{pmatrix},$$

wobei wegen (7) und II (3) G ganzzahlig ist und die Elemente von N die Primzahl p nicht im Nenner enthalten. Wegen (5) ist

$$(11) \quad M \equiv D \pmod{1}.$$

Die Determinantenteiler von M_1^{-1} stimmen nach (8) mit denen von Q_1 und nach (2) auch mit denen von P_1 überein. Speziell ist

$$(12) \quad \mathcal{A} = |M_1^{-1}| = \pm |P_1| = p^{2ei} d, \quad d \not\equiv 0 \pmod{p},$$

$$(13) \quad \mathcal{A}_{m-n_p} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

wenn mit $\mathcal{A}_k$ der größte gemeinsame Teiler aller k -reihigen Unterdeterminanten bezeichnet wird.

Wir setzen $M_1^{-1} = A = (a_{\nu\mu})$, $M_1 = (m_{\nu\mu})$, und es sei $M_{\nu\mu}$ die Matrix, die aus M_1 durch Streichen der ν -ten Zeile und μ -ten Spalte hervorgeht. Dann ist bekanntlich

$$a_{\nu\mu} = \pm |M_{\nu\mu}| \mathcal{A}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(14) \quad a_{\nu\mu} \equiv 0 \begin{cases} \pmod{p^{e_\nu}} & \text{für } \nu \leq n_p, \\ \pmod{p^{e_\mu}} & \text{für } \mu \leq n_p, \\ \pmod{p^{e_\nu + e_\mu}} & \text{für } \nu, \mu \leq n_p, \nu \neq \mu. \end{cases}$$

In der Tat enthält $M_{\nu\mu}$ in den Nennern seiner Elemente als Potenzen von p nur die p^{e_i} je einmal, und zwar für $\nu \leq n_p$ oder $\mu \leq n_p$ nur die p^{e_i} mit $i \neq \nu$ bzw. $i \neq \mu$ und für $\nu, \mu \leq n_p$ sogar nur die mit $i \neq \nu$ und $i \neq \mu$. Da $\mathcal{A}$ nach (12) durch p^{2ei} teilbar ist, folgt die Behauptung.

Streicht man in A die n_p ersten Zeilen und Spalten, so gilt für die entstehende Matrix A_{n_p} ,

$$(15) \quad |A_{n_p}| \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so wären wegen (14) alle $(m - n_p)$ -reihigen Unterdeterminanten von A durch p teilbar im Widerspruch zu (13).

Wegen $M_1 A = E$ ist $\sum_{\mu} m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} = 1$. Für $\nu \leq n_p$, $\nu \neq \mu$ ist $m_{\nu\mu}$ nach (10) und (11) ganz und nach (14) $a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p^{e_\nu}}$; also ist

$$1 = \sum_{\mu} m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} \equiv m_{\nu\nu} a_{\nu\nu} \pmod{p}.$$

Nach (11) und (5) ist $m_{\nu\nu} \equiv d_\nu p^{-e_\nu} \pmod{1}$, und es folgt

$$(16) \quad d_\nu a_{\nu\nu} p^{-e_\nu} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{für} \quad \nu \leq n_p.$$

Dritter Schritt. Bestimmung von $C_p(A)$.

Hilfssatz 6. Ist A irgendeine ganzzahlige symmetrische Matrix mit den Eigenschaften (14), (15) und (16) und $r > 0$, so gibt es ein unimodulares S , so daß

$$S'AS \equiv \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \pmod{p^r}, \quad C = (c_i p^{e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n_p,$$

$$d_\nu c_\nu \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{und} \quad |T| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Beweis. Es genügt offenbar, den Beweis für genügend große r zu führen. Wir nehmen $r > \omega(A) = \sum e_i$ an. Die Konstruktion geschieht dann nach dem üblichen Ausräumverfahren. Wir wählen x so, daß $a_{11}x + a_{1\mu} = 0 \pmod{p^r}$ wird. Das ist möglich, da a_{11} und $a_{1\mu}$ durch p^{e_1} teilbar sind und $a_{11} p^{-e_1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Addiert man die mit x multiplizierte erste Spalte zur μ -ten, so wird $a_{\nu\mu}$ durch $a_{\nu 1}x + a_{\nu\mu}$ ersetzt. Dabei bleiben die Eigenschaften (14), (15), und (16) erhalten. Wir bestätigen das im Einzelnen:

(14) ist für $\mu > n_p$ klar und folgt für $\mu \leq n_p$ daraus, daß dann $x \equiv 0 \pmod{p^{e_\mu}}$ ist.

(15): A_{n_p} ändert sich bei $\mu \leq n_p$ gar nicht und wird sonst durch eine $\pmod{p}$ kongruente Matrix ersetzt.

(16): Es ist nur etwas zu beweisen, wenn $\mu \leq n_p$ ist; dann wird $a_{\mu\mu}$ durch $a_{\mu 1}x + a_{\mu\mu}$ ersetzt, und es gilt

$$d_\mu (a_{\mu 1}x + a_{\mu\mu}) p^{-e_\mu} \equiv d_\mu a_{\mu\mu} p^{-e_\mu} \pmod{p^{e_1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Addiert man nun die mit x multiplizierte erste Zeile zur μ -ten, so gilt das gleiche, und man hat im ganzen eine unimodulare Transformation ausgeführt. Geschieht das sukzessiv für alle $\mu > 1$, so erhält man

$$S'AS \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \pmod{p^r},$$

wobei A^1 wieder den Voraussetzungen genügt. Durch Induktion ergibt sich die Behauptung.

Aus den in I § 2 hergeleiteten Eigenschaften von C_p (Satz 1–3) folgt

$$C_p(A) = C_p \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = C_p(C) = \varrho \cdot \prod_{e_r \equiv 1 \pmod{2}} \left(\frac{c_r}{p} \right)$$

und damit

$$(17) \quad C_p(A) = \varrho \cdot \prod_{e_r \equiv 1 \pmod{2}} \left(\frac{d_r}{p} \right),$$

denn wegen $d_r c_r \equiv 1 \pmod{p}$ ist $\left(\frac{c_r}{p} \right) = \left(\frac{d_r}{p} \right)$ (vgl. I (2), (3)).

Kehren wir wieder speziell zu $A = M_1^{-1}$ zurück, so lehrt der Vergleich von (17) mit (6) und (9)

$$(18) \quad C_p(Q) = \varrho \cdot \prod_{e \equiv 1 \pmod{2}} v_p^e(\mathfrak{T}^1).$$

Diese Formel gilt offenbar auch für den oben ausgeschlossenen Fall, daß eine Gruppe $\mathfrak{T}_p$ in der Zerlegung von $\mathfrak{T}^1$ gar nicht vorkommt ($\varrho = 1$ wegen $\lambda = 0$ vgl. I (14)), und wir erhalten als Ergebnis

Satz 6. Die MINKOWSKISCHEN Einheiten eines Knotens sind durch die Torsionskoeffizienten und die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt, und zwar gilt bei geeigneter Festsetzung der Orientierungen ($\varepsilon = +1$ in Satz 5)

$$C_p = \left(\frac{C}{p} \mid \frac{\lambda}{2} \right)_{e \equiv 1 \pmod{2}} \prod v_p^e;$$

dabei ist λ die Anzahl der Torsionskoeffizienten, die die Primzahl p in ungerader Potenz enthalten.

Literaturverzeichnis.

GOERITZ, L.

[1] Knoten und quadratische Formen. Math. Zeitschr. Bd. 36 (1933), S. 647.

LANDAU, E.

[2] Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 1. Leipzig: Hirzel 1927.

MINKOWSKI, H.

[3] Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abh. Bd. 1, S. 219. Leipzig: Teubner 1911.

REIDEMEISTER, K.

[4] Knotentheorie. Ergebnisse der Math. II 1. Berlin: Springer 1932.

SEIFERT, H.

- [5] Verschlingungsinvarianten. Sitz.-Ber. der preuß. Akad. d. Wiss. 1933, S. 811.

SEIFERT, H.

- [6] Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Hamb. Math. Abh. Bd. 11 (1936), S. 84.

SEIFERT, H. u. THRELFALL, W.

- [7] Lehrbuch der Topologie. Leipzig und Berlin: Teubner 1934.

BURGER, E.

- [8] Über Gruppen mit Verschlingungen. Crelle Journal Bd. 188 (1950), S. 193.

BLANCHFIELD, R. C. und Fox, R. H.

- [9] Invariants of self-linking. Ann. of Math. Bd. 53 (1951), S. 556.

(Eingegangen am 12. Januar 1952.)

Über die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

Von

Paul Mönnig aus Aachen.

1. Einleitung.

Das Lösungsproblem der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung

$$(1) \quad H(x, p) = k, \quad p = \text{grad } W$$

(hier wie auch häufig im Folgenden ist x für $x_1, \dots, x_n$; p für $p_1, \dots, p_n$ und $\text{grad } W$ für $\frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$ geschrieben) wird durch die Charakteristikentheorie auf die Integration der kanonischen Gleichungen

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

zurückgeführt. Das JACOBISCHE Integrationsverfahren lehrt dann, daß man n voneinander unabhängige Integrale

$$(3) \quad F^i(x, p) = c_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

der kanonischen Gleichungen benötigt, welche die Involutionsbedingungen

$$(4) \quad (F^i, F^k) \equiv \sum_{l=1}^n (F_{p_l}^i F_{x_l}^k - F_{x_l}^i F_{p_l}^k) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

erfüllen. Löst man das System der Gleichungen (3) nach $p_1, \dots, p_n$ auf, was unter den Voraussetzungen des Satzes über die impliziten Funktionen möglich ist,

$$(5) \quad p_i = \pi_i(x, c) \quad (i = 1, \dots, n),$$

(wir schreiben c statt $c_1, \dots, c_n$), so ist

$$(6) \quad dW = \sum_{i=1}^n \pi_i(x, c) dx_i$$

das totale Differential einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung (1).

Selbstverständlich müssen wir voraussetzen, daß im Phasenraum x, p ein Bereich $\mathfrak{B}$ existiert, in dem die Funktion H erklärt ist und den Wert k aus (1) annehmen kann. In diesem Bereich sollen H zweimal

stetig nach sämtlichen Variablen differenzierbar und die Ableitungen H_{p_i} von Null verschieden sein.

Nach einem Satz von JACOBI ist eine Funktion $F(x, p)$ dann und nur dann ein Integral der kanonischen Gleichungen (2), wenn sie eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(7) \quad (H, F) \equiv \sum_{l=1}^n (H_{p_l} F_{x_l} - H_{x_l} F_{p_l}) = 0$$

ist.

Gegenstand dieser Arbeit ist nun, Untersuchungen darüber anzustellen, welche Vereinfachungen und Besonderheiten sich ergeben, wenn gewisse Funktionen F^i existieren, die nicht nur die Gleichungen (7) erfüllen, sondern darüber hinaus auch noch Lösungen sind des Systems

$$(8) \quad H_{p_l} F_{x_l} - H_{x_l} F_{p_l} = 0 \quad (l = 1, \dots, n),$$

welches aus (7) durch summandweises Verschwinden der POISSONschen Klammer hervorgeht. Die Fragestellung liefert einen, m. W. bisher noch nicht bemerkten Zugang zu der Theorie der durch Trennung der Variablen lösbaren HAMILTON-JACOBIschen partiellen Differentialgleichung.

2. Lösung des linearen Systems¹⁾.

Bei der Überprüfung des Systems (8) auf seine Vollständigkeit gelangt man zu den Integrabilitätsbedingungen

$$(9) \quad H_{x_k x_l} H_{p_k} H_{p_l} - H_{x_k p_l} H_{p_k} H_{x_l} - H_{p_k x_l} H_{x_k} H_{p_l} + H_{p_k p_l} H_{x_k} H_{x_l} = 0 \text{ für } k \neq l^{2)}.$$

Sind sie erfüllt, so ist

$$(10) \quad F_{x_l} - \frac{H_{x_l}}{H_p} F_{p_l} = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

ein JACOBISches System.

Sind sie aber nur teilweise erfüllt, so lassen sich die Variablen $x_1, \dots, x_n$ zu gewissen Komplexen $x_1, \dots, x_r$ ($r < n$) zusammenfassen, wobei x_k und x_l dann und nur dann dem gleichen Komplex x_ϱ angehören, wenn eine Indexkette $j_0 = k; j_1; \dots; j_t = l$ existiert, für welche die Ungleichungen gelten

$$(11) \quad H_{x_{j_{t-1}} x_{j_t}} H_{p_{j_{t-1}}} H_{p_{j_t}} - H_{x_{j_{t-1}} p_{j_t}} H_{p_{j_{t-1}}} H_{x_{j_t}} - H_{p_{j_{t-1}} x_{j_t}} H_{x_{j_{t-1}}} H_{p_{j_t}} \\ + H_{p_{j_{t-1}} p_{j_t}} H_{x_{j_{t-1}}} H_{x_{j_t}} \neq 0 \quad (\tau = 1, \dots, t).$$

¹⁾ Siehe etwa CARATHEODORY: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung. S. 26–36.

²⁾ Zu dieser Gleichung vgl. LEVI-CIVITA: Sulla integrazione della equazione di HAMILTON-JACOBI per separazione di variabili. Math. Ann. 59 (1904), S. 385; dort auf andere Weise hergeleitet.

Durch geeignete Umbenennung der Indizes können wir erreichen, daß aus $x_k \in \mathfrak{x}_\varrho$; $x_l \in \mathfrak{x}_\sigma$; $k < l$ stets $\varrho \leq \sigma$ folgt. Der Komplex $\mathfrak{x}_\varrho$ enthält dann die Variablen $x_{i_{\varrho-1}+1}, \dots, x_{i_\varrho}$, wobei $i_0 = 0$ und i_ϱ die Zahl der Koordinaten ist, die den ersten ϱ Komplexen angehören.

Den x_k entsprechend werden die kanonisch konjugierten p_k zu Komplexen $\mathfrak{p}_\varrho$, ($\varrho = 1, \dots, r$) zusammengefaßt.

Man adjungiere nun zu (8) die durch Klammerbildung neu hinzutretenden Gleichungen und stelle ein JACOBISCHES System auf. Es ergibt sich

$$(12) \quad \begin{cases} F_{x_l} - \frac{H_{x_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} \cdot F_{p_{i_\varrho}} = 0 & (l = i_{\varrho-1} + 1, \dots, i_\varrho; \varrho = 1, \dots, r), \\ F_{p_l} - \frac{H_{p_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} \cdot F_{p_{i_\varrho}} = 0 & (l = i_{\varrho-1} + 1, \dots, i_\varrho - 1; \varrho = 1, \dots, r). \end{cases}$$

Das zugehörige System der charakteristischen totalen Differentialgleichungen lautet

$$(13) \quad dp_{i_\varrho} = - \sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho} \frac{H_{x_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} dx_l - \sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho-1} \frac{H_{p_l}}{H_{p_{i_\varrho}}} dp_l \quad (\varrho = 1, \dots, r).$$

Es ist nach den eingeführten Variablenkomplexen insofern getrennt, als in der ϱ -ten Gleichung nur die zu $\mathfrak{x}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{p}_\varrho$ gehörigen Differentiale $dx_{i_{\varrho-1}+1}, \dots, dx_{i_\varrho}$ bzw. $dp_{i_{\varrho-1}+1}, \dots, dp_{i_\varrho}$ auftreten. Die Trennung gestattet aber, jede Gleichung unabhängig von den anderen zu integrieren. Wir multiplizieren mit $H_{p_{i_\varrho}}$

$$(14) \quad \sum_{l=i_{\varrho-1}+1}^{i_\varrho} (H_{x_l} dx_l + H_{p_l} dp_l) = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, r)$$

und erhalten die Integrale

$$(15) \quad H(x_1^0, \dots, x_{\varrho-1}^0, x_\varrho, x_{\varrho+1}^0, \dots, x_r^0, p_1^0, \dots, p_{\varrho-1}^0, p_\varrho, p_{\varrho+1}^0, \dots, p_r^0) \\ = H(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{p}^0) = k \quad (\varrho = 1, \dots, r),$$

welche zueinander in Involution liegen, da sie nur die Variablen $x_{i_{\varrho-1}+1}, \dots, x_{i_\varrho}$ jeweils eines Komplexes und ihre kanonisch konjugierten enthalten.

Wir haben den Satz: *Man erhält die Integrale des Systems (8), indem man in der Funktion $H(x, p) \equiv H(x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_r)$ sämtliche nicht zu den Komplexen $\mathfrak{x}_\varrho, \mathfrak{p}_\varrho$ gehörenden Variablen x_k, p_k durch gewisse Anfangswerte x_k^0, p_k^0 ersetzt.*

3. Trennung der Variablen.

Wollen wir eine vollständige Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung (1) ermitteln, so können wir vermöge der Inte-

grale (15) nun das System

$$(16) \quad H(x_1^0, \dots, x_{\varrho-1}^0, x_{\varrho}, x_{\varrho+1}^0, \dots, x_r^0, p_1^0, \dots, p_{\varrho-1}^0, p_{\varrho}, p_{\varrho+1}^0, \dots, p_r^0) = k, \\ p = \text{grad } W \quad (\varrho = 1, \dots, r)$$

betrachten. In Erweiterung des schon von STÄCKEL³⁾ benutzten Summenansatzes schreiben wir

$$(17) \quad W = \sum_{\varrho=1}^r W_{\varrho}(x_{\varrho})$$

und erhalten: Das System (16) zerfällt durch den Ansatz (17) in r voneinander unabhängige Differentialgleichungen in den Variablen nur jeweils eines Komplexes x_{ϱ} .

4. Über die Gestalt der Funktion $H(x, p)$.

Notwendig und hinreichend für die im letzten Abschnitt durchgeführte Trennung der Variablen ist das Bestehen der LEVI-CIVITASchen Bedingungen

$$(18) \quad H_{x_k x_l} H_{p_k} H_{p_l} - H_{x_k p_l} H_{p_k} H_{x_l} - H_{p_k x_l} H_{x_k} H_{p_l} + H_{p_k p_l} H_{x_k} H_{x_l} = 0 \\ \text{für } \varrho(k) \neq \varrho(l),$$

wobei $\varrho(k)$ bzw. $\varrho(l)$ die Indizes der Variablenkomplexe sind, denen x_k bzw. x_l angehören. Die Bedingungen stellen ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion H dar, mit dessen Lösung wir uns nun beschäftigen werden.

Wir benutzen den folgenden Satz⁴⁾: Ist in einem vollständigen System linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung M die Zahl der unabhängigen Gleichungen und N die Zahl der unabhängigen Variablen, so gibt es genau $N - M$ unabhängige Lösungen. Zwischen diesen und jeder weiteren Lösung existiert eine Abhängigkeit.

Es sei nun vorausgesetzt, daß wir eine nichttriviale Funktion $H(x, p)$, ($H_{p_{i_0}} \neq 0$), welche die Gleichungen (18) befriedigt, bereits kennen. Das mit dieser Funktion gebildete System (12) ist dann ein JACOBI'sches System. Die Funktionen $F^1(x, p), \dots, F^r(x, p)$ seien unabhängige Lösungen.

Da insbesondere aber auch die Funktion H eine Lösung des Systems (12) ist, besteht eine funktionale Abhängigkeit

$$(19) \quad H = f(F^1, \dots, F^r).$$

³⁾ STÄCKEL: Über die Integration der HAMILTON-JACOBI'schen Differentialgleichung mittels Separation der Variablen. (Habil. Schr. Halle a. S. 1891). Dort für den Sonderfall $r = n$ angegeben.

⁴⁾ Siehe etwa FRANK u. v. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl. Bd. 1, S. 639.

Wir streichen nun aus dem System (12) sämtliche Gleichungen heraus, welche mit einem bestimmten Komplexindex q behaftet sind. So gewinnt man ein Teilsystem, das wieder ein JACOBISCHES System ist und aus $(2n - r) - [2(i_q - i_{q-1}) - 1]$ Gleichungen besteht. Es muß nach dem vorausgeschickten Satz genau $r + 2(i_q - i_{q-1}) - 1$ unabhängige Lösungen besitzen.

Offenbar sind die Funktionen $F^1, \dots, F^r$ auch in dem verkürzten System wieder Lösungen. Als weitere Lösungen hat man, wie sich durch Einsetzen in das verkürzte System sofort zeigt, die zu x_q und p_q gehörigen Variablen $x_{i_{q-1}+1}, \dots, x_{i_q}, p_{i_{q-1}+1}, \dots, p_{i_q}$. Dies sind nun insgesamt $r + 2(i_q - i_{q-1})$ Lösungen, und da nur $r + 2(i_q - i_{q-1}) - 1$ unabhängig sein können, besteht eine Gleichung

$$(20) \quad \Phi^q(x_q, p_q, F^1, \dots, F^r) = 0.$$

Das gleiche Verfahren führe man für sämtliche r Komplexe durch. Man erhält das Gleichungssystem

$$(21) \quad \Phi^q(x_q, p_q, F^1, \dots, F^r) = 0 \quad (q = 1, \dots, r)$$

und damit den Satz:

Jede Lösung $H(x, p)$ des Systems (18) ist durch eine Gleichung der Gestalt (19) darstellbar, wobei für die Argumentfunktionen $F^1(x, p), \dots, F^r(x, p)$ Identitäten der Form (21) bestehen.

Wir beweisen nun den Umkehrsatz:

Gegeben seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$(22) \quad \Phi^q(x_q, p_q, u_1, \dots, u_r) \quad (q = 1, \dots, r)$$

und

$$(23) \quad f(u_1, \dots, u_r).$$

Für einen inneren Punkt $x^0, p^0, u_1^0, \dots, u_r^0$ des Definitionsbereiches sollen die Gleichungen

$$(24) \quad \Phi^q(x_q^0, p_q^0, u_1^0, \dots, u_r^0) = 0 \quad (q = 1, \dots, r)$$

erfüllt sein. Dort sei ferner

$$(25) \quad \Phi_{p_{i_q}}^q \neq 0 \quad (q = 1, \dots, r)$$

und

$$(26) \quad \frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^r)}{\partial(u_1, \dots, u_r)} \neq 0.$$

Dann lassen sich nach dem Satz von den impliziten Funktionen in einem gewissen, den Punkt $x^0, p^0, u_1^0, \dots, u_r^0$ als inneren Punkt enthaltenden Bereich die Gleichungen

$$(27) \quad \Phi^q(x_q, p_q, u_1, \dots, u_r) = 0 \quad (q = 1, \dots, r)$$

nach $u_1, \dots, u_r$ auflösen,

$$(28) \quad u_q = F^q(x, p) \quad (q = 1, \dots, r),$$

die so gewonnenen Funktionen $F^1, \dots, F^r$ sind voneinander unabhängig und die Funktion

$$(29) \quad H(x, p) = f(F^1, \dots, F^r)$$

erfüllt die Gleichungen (18).

Ersetzt man die u^q aus (27) durch die Funktionen $F^q(x, p)$, so erhält man die Identitäten (21). Durch Differentiation nach p_{i_0} ergibt sich

$$(30) \quad \Phi_{p_{i_0}}^q = - \sum_{\tau=1}^r \Phi_{u_\tau}^q F_{p_{i_0}}^\tau.$$

Es folgt

$$(31) \quad \frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^r)}{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})} = (-1)^r \frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^r)}{\partial(u_1, \dots, u_r)} \cdot \frac{\partial(F^1, \dots, F^r)}{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})}.$$

Nun ist aber

$$(32) \quad \Phi_{p_{i_0}}^q = 0 \quad \text{für } q \neq \sigma.$$

Die in (31) linker Hand stehende Determinante reduziert sich also auf das Produkt

$$(33) \quad \Phi_{p_{i_1}}^1 \Phi_{p_{i_2}}^2 \dots \Phi_{p_{i_r}}^r.$$

Trägt man diesen Ausdruck in die Gleichung (31) ein, so folgt aus den Voraussetzungen (25) und (26) die Ungleichung

$$(34) \quad \frac{\partial(F^1, \dots, F^r)}{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})} \neq 0,$$

womit die Unabhängigkeit der Funktionen $F^1, \dots, F^r$ voneinander gezeigt ist.

Um jetzt den das Bestehen der Gleichungen (18) aussagenden Teil des Satzes zu beweisen, bestätigen wir zunächst die Formeln

$$(35) \quad \Phi_{p_l}^q \Phi_{x_l}^\sigma - \Phi_{x_l}^q \Phi_{p_l}^\sigma = 0 \quad (q; \sigma = 1, \dots, r, l = 1, \dots, n).$$

Offenbar sind $\Phi_{p_l}^q$ und $\Phi_{x_l}^q$ stets gleich Null, solange p_l und x_l nicht dem q -ten Komplex angehören (siehe (22)). Das Produkt $\Phi_{p_l}^q \Phi_{x_l}^\sigma$ kann daher nur dann von Null verschieden sein, wenn $q = \sigma$ ist, und p_l, x_l dem q -ten Komplex angehören. Dann heben sich aber in (35) die beiden Summanden linker Hand gegenseitig auf, so daß für alle Indexkombinationen die Gleichung gilt.

Beachtet man nun (vgl. Gl. (30)) die Relationen

$$(36) \quad \Phi_{p_l}^q = - \sum_{\mu=1}^r \Phi_{u_\mu}^q F_{p_l}^\mu; \quad \Phi_{x_l}^q = - \sum_{\mu=1}^r \Phi_{u_\mu}^q F_{x_l}^\mu,$$

so folgt wegen (26) aus (35)

$$(37) \quad F_{p_l}^\mu \Phi_{x_l}^\sigma - F_{x_l}^\mu \Phi_{p_l}^\sigma = 0 \quad (\mu; \sigma = 1, \dots, r, l = 1, \dots, n),$$

wegen (29) liefert eine Überschiebung mit $f_{x_l^\mu}$

$$(38) \quad H_{p_l} \Phi_{x_l}^\sigma - H_{x_l} \Phi_{p_l}^\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, n),$$

und Anwendung der Schlußweise auf die zweiten Faktoren ergibt

$$(39) \quad H_{p_l} F_{x_l}^\mu - H_{x_l} F_{p_l}^\mu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, n).$$

Auf die Gleichungen (38) wenden wir nun die Klammeroperation an. Wir erhalten mit Rücksicht auf (39) und

$$(40) \quad [\Phi_{x_k}^\sigma]_{x_l} = \Phi_{x_k x_l}^\sigma + \sum_{\mu=1}^r \Phi_{x_k x_l^\mu}^\sigma F_{x_l}^\mu; \quad [\Phi_{x_k}^\sigma]_{p_l} = \dots, \text{ usw.} \quad |$$

die Gleichungen

$$(41) \quad (H_{p_k} H_{x_k p_l} - H_{x_k} H_{p_k p_l}) \Phi_{x_l}^\sigma - (H_{p_k} H_{x_k x_l} - H_{x_k} H_{p_k x_l}) \Phi_{p_l}^\sigma \\ - (H_{p_l} H_{x_l p_k} - H_{x_l} H_{p_l x_k}) \Phi_{x_k}^\sigma + (H_{p_l} H_{x_l x_k} - H_{x_l} H_{p_l x_k}) \Phi_{p_k}^\sigma = 0.$$

Gehören jetzt x_k und x_l verschiedenen Koordinatenkomplexen an ($\varrho(k) \neq \varrho(l)$), so ist mindestens entweder $\Phi_{x_k}^\sigma = \Phi_{p_k}^\sigma = 0$ oder $\Phi_{x_l}^\sigma = \Phi_{p_l}^\sigma = 0$. Gl. (41) reduziert sich daher auf

$$(42) \quad (H_{p_k} H_{x_k p_l} - H_{x_k} H_{p_k p_l}) \Phi_{x_l}^\sigma - (H_{p_k} H_{x_k x_l} - H_{x_k} H_{p_k x_l}) \Phi_{p_l}^\sigma = 0 \\ (\varrho(k) \neq \varrho(l)),$$

und wegen (36) und (29) ergibt sich unter Wiederholung der früheren Schlußweise das Gleichungssystem (18), womit unser Beweis erbracht ist.

Wir haben damit gezeigt:

Die Gleichungen (19) und (21) sind für das Bestehen des Systems (18) hinreichend und notwendig. Durch (19) und (21) ist daher das allgemeine Integral des Systems gegeben.

5. Der Fall $r = n$.

Wenn die Gleichungen (18) für alle $k \neq l$ erfüllt sind, haben wir es mit n Komplexen zu tun. Die Bestimmungsgleichungen (19) und (21) für die Funktion $H(x, p)$ vereinfachen sich zu

$$(43) \quad \begin{cases} \Phi^i(x_i, p_i, F^1, \dots, F^n) = 0 & (i = 1, \dots, n); \\ H = f(F^1, \dots, F^n). \end{cases}$$

Um ein vollständiges Integral der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung (1) zu ermitteln, löse man die Gleichungen

$$(44) \quad \Phi^i(x_i, p_i, c_1, \dots, c_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

wobei zwischen der Konstanten k und den Parametern c_i der Zusammenhang

$$(45) \quad k = f(c_1, \dots, c_n)$$

zu beachten ist, *nach* $p_1, \dots, p_n$ *auf*, was wir als möglich voraussetzen wollen. *Erhält man dabei*

$$(46) \quad p_i = \pi_i(x_i, c_1, \dots, c_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

so ist

$$(47) \quad W = \sum_{i=1}^n \int \pi_i(x_i, c_1, \dots, c_n) dx_i$$

das gesuchte Integral.

6. Anwendung auf die Mechanik.

DALL' ACQUA behandelte die Lösung der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung durch Trennung der Variablen⁵⁾ unter Beschränkung auf den Fall der Mechanik

$$(48) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(x) p_i p_k + U(x).$$

Er gibt durch Formeln für U und die g_{ik} hinreichende und notwendige Bedingungen für die Möglichkeit der Trennung. Seine Ergebnisse lassen sich herleiten durch geeignete Spezialisierung der Funktionen Φ^i und f aus (43).

Wir setzen zu diesem Zweck

$$(49) \quad \Phi^{i'} \equiv p_{i'} - \sum_{k'=1}^m \psi_{i'k'}(x_{i'}) F^{k'} = 0 \quad (i' = 1, \dots, m \leq n, \det |\psi_{i'k'}| \neq 0);$$

$$(50) \quad \begin{aligned} \Phi^i \equiv & p_i^2 + p_i \sum_{k'=1}^m \omega_{ik'}(x_i) F^{k'} + \sum_{k', l'=1}^m \omega_{i k' l'}(x_i) F^{k'} F^{l'} \\ & + \chi_i(x_i) - \sum_{k=m+1}^n \varphi_{ik}(x_i) F^k = 0 \\ & (i = m+1, \dots, n, \det |\varphi_{ik}| \neq 0); \end{aligned}$$

$$(51) \quad H = \sum_{i', k'=1}^m a_{i'k'} F^{i'} F^{k'} + \sum_{i=m+1}^n a_i F^i.$$

Offenbar folgt aus (49), daß die Funktionen $F^1, \dots, F^m$ homogen linear in $p_1, \dots, p_m$ sind. Aus (50) ergibt sich dann, daß $F^{m+1}, \dots, F^n$ additiv zusammengesetzt sind aus einer homogenen quadratischen Form der p_i und einem Glied, das die p_i nicht enthält. Durch (51) wird daher H in der Gestalt der Gleichung (48) gegeben.

Führt man die Rechnung durch, so lassen sich U und die g_{ik} als Funktionen von $x_1, \dots, x_n$ ermitteln, wobei man die DALL' ACQUASCHEN Formeln gewinnt.

⁵⁾ F. A. DALL' ACQUA: Le equazioni di HAMILTON-JACOBI che si integrano per separazione di variabili. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1912. Vgl. auch PRANGE: Enzyklopädie d. Math. Wissenschaften Teil 4, Mechanik Bd. 2, S. 644–657.

Über die Schlichtheitsschranken gewisser Funktionenfamilien.

Von

Friedhelm Erwe in Bonn a. Rh.

Zu jeder in $|z| > 1$ meromorphen Funktion

$$(1) \quad \varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots$$

existieren Zahlen $\sigma \geq 1$ derart, daß $\varphi(z)$ in $|z| > \sigma$ schlicht ist. Die untere Grenze aller dieser Zahlen σ heiße der Schlichtheitsradius von $\varphi(z)$ und werde mit $\sigma\{\varphi\}$ bezeichnet.

Sei nun eine Familie $\mathfrak{F}$ von in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen (1) vorgegeben. Dann existiert eine obere Grenze $S\{\mathfrak{F}\}$ aller Zahlen $\sigma\{\varphi\}$, wenn φ die Menge der zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Funktionen durchläuft, und zwar ist

$$1 \leq S\{\mathfrak{F}\} \leq \infty.$$

$S\{\mathfrak{F}\}$ heißt die Schlichtheitsschranke der Familie $\mathfrak{F}$ (sie besitzt natürlich nur dann Interesse, wenn sie $< \infty$ ist). Eine Funktion der Familie, deren Schlichtheitsradius mit der Schlichtheitsschranke übereinstimmt, heißt eine Schrankenfunktion (bezügl. der Schlichtheitsschranke).

Die Familie derjenigen in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen (1), für die gilt:

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_{\nu}|^2 \leq 1,$$

enthält nach dem BIEBERBACHSchen Flächensatze die Familie der in $|z| > 1$ schlichten meromorphen Funktionen, die wie (1) normiert sind, aber sie ist bekanntlich auch eine echte Obermenge der letzteren. Darüber hinaus läßt sich sogar sagen: Die Familie der in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen (1), für die (2) gilt, besitzt eine Schlichtheitsschranke, die größer als 1, aber endlich ist, und zwar gleich $\sqrt{2}$, wie diese Arbeit zeigen wird. Allgemeiner noch wird die entsprechende Fragestellung für jede der Familien $\mathfrak{F}_{k,a}$ behandelt, die bei festen reellen Zahlen $k > 0$, $a > 0$ aus denjenigen in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen (1) mit

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_{\nu}|^k \leq a$$

bestehen. Für $k = 2$, $a = 1$ ist das speziell die oben in Verbindung mit dem BIEBERBACHSchen Flächensatz erwähnte Familie. Für $k = 2$ und beliebiges $a > 0$ läßt sich übrigens die analoge geometrische Interpretation geben, der der Flächensatz seinen Namen verdankt: Wenn z auf einem Kreise $|z| = r > 1$ einmal umläuft, so überstreicht der Fahrstrahl, der vom Nullpunkt zu dem vermöge einer in $1 < |z| < \infty$ regulären Funktion (1) aus z entstehenden Bildpunkt $\varphi(z)$ weist, eine Fläche vom (mit Vorzeichen versehenen) Inhalt

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_r &= \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(re^{it}) + \overline{\varphi(re^{it})}}{2} \cdot \frac{\frac{d}{dt} \varphi(re^{it}) - \frac{d}{dt} \overline{\varphi(re^{it})}}{2i} dt \\ &= \pi \cdot \left(r^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{\alpha_{\nu}^2}{r^{2\nu}} \right).\end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 1 + 0$ ergibt sich

$$\mathfrak{F} = \lim_{r \rightarrow 1+0} \mathfrak{F}_r = \pi \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\alpha_{\nu}|^2 \right)$$

(man sieht, daß in jedem Fall $\mathfrak{F} \leq \pi$ ist, $\mathfrak{F} = -\infty$ nicht ausgeschlossen). Die Familie $\mathfrak{F}_{2,a}$ ist also dadurch charakterisiert, daß

$$\mathfrak{F} \geq \pi(1-a).$$

Daß übrigens alle Funktionen dieser Familie — und sogar alle Funktionen jeder der Familien $\mathfrak{F}_{k,a}$ — in $1 < |z| < \infty$ regulär sind (in $z = \infty$ haben sie einen Pol), folgt unmittelbar aus dem Kriterium von CAUCHY-HADAMARD, wenn man bedenkt, daß wegen (3) die $|\alpha_{\nu}|$ nach oben beschränkt sind.

Bei der Lösung der aufgeworfenen Frage finden zwei Hilfssätze Verwendung, von denen der zweite bewiesen werden soll.

Hilfssatz 1. Seien A_{ν} nicht-negative, B_{ν} positive reelle Zahlen ($\nu = 1, 2, \dots$), seien ferner k und l positive Zahlen mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$. Dann gilt die HÖLDERSche Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} B_{\nu} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}^k \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu}^l \right)^{\frac{1}{l}},$$

Konvergenz der rechtsseitig auftretenden Reihen vorausgesetzt. Das Gleichheitszeichen wird genau dann erreicht, wenn

$$\frac{A_{\nu}^k}{B_{\nu}^l} = \text{const.} \quad \text{für alle } \nu.$$

Hilfssatz 2. Die Familie $\mathfrak{F}_r$ (r feste Zahl > 1) derjenigen in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen $\varphi(z)$ der Form (1), für die

$$(4) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_{\nu}|}{r^{\nu+1}} \leq 1$$

gilt, besitzt die Zahl r als Schlichtheitschranke. Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen, für die in (4) das Gleichheitszeichen gilt, und für die eine Zahl ε existiert, so daß

$$(5) \quad \alpha_\nu = |\alpha_\nu| \varepsilon^{\nu+1} \quad \text{für alle } \nu.$$

Beweis. Es werde

$$\Phi(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} & \text{für } z_1 \neq z_2, \\ \varphi'(z_1) & \text{für } z_1 = z_2 \end{cases}$$

gesetzt. Dann gilt

$$(6) \quad \begin{aligned} \Phi(z_1, z_2) &= 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \alpha_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{z_1^{\nu+1-\mu} z_2^\mu} \right\}, \\ |\Phi(z_1, z_2)| &\geq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ |\alpha_\nu| \cdot \left| \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{z_1^{\nu+1-\mu} z_2^\mu} \right| \right\} \\ &\geq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ |\alpha_\nu| \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{|z_1|^{\nu+1-\mu} |z_2|^\mu} \right\}. \end{aligned}$$

Für $|z_1| \geq r$, $|z_2| \geq r$ folgt hieraus unter Verwendung von (4)

$$(7) \quad |\Phi(z_1, z_2)| \geq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r^{\nu+1}} \geq 0.$$

Verfolgt man die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in den einzelnen Übergängen zwischen (6) und (7), und zwar am besten hinten beginnend, so ergeben sich als notwendige (und wie man nachträglich leicht feststellt, auch hinreichende) Bedingungen dafür, daß $\Phi(z_1, z_2)$ für ein gewisses Wertepaar z_1, z_2 (nicht notwendig $z_1 \neq z_2$) in $|z_1| \geq r$, $|z_2| \geq r$ verschwindet

1) Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (4).

2) $|z_1| = |z_2| = r$ (der triviale Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$ ist wegen 1) ausgeschlossen).

¹⁾ Die letztere Aussage ist äquivalent mit: Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen $\varphi(z)$, die auf $|z| = r$ eine Nullstelle der Ableitung besitzen. — Es ist nämlich

$$\varphi'(z) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}}, \quad |\varphi'(z)| \geq 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{|\alpha_\nu|}{r^{\nu+1}} \quad (|z| = r),$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn

$$\frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}} = \left| \frac{\alpha_\nu}{z^{\nu+1}} \right|, \quad \text{d. h. } \alpha_\nu = |\alpha_\nu| \left(\frac{z}{|z|} \right)^{\nu+1}.$$

Folglich ist $\varphi'(z) = 0$ für ein gewisses z auf $|z| = r$ genau dann, wenn in (4) das Gleichheitszeichen steht und wenn (5) gilt $\left(\varepsilon = \frac{z}{|z|} \right)$.

3) (Es werde der Fall $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$ ausgeschlossen, und es sei etwa $\alpha_j \neq 0$ für ein $j \geq 2$.)

$$\frac{1}{z_1^{j+1-\mu} z_2^\mu} = \frac{1}{z_1^j z_2} \quad (\mu = 2, 3, \dots, j^2),$$

d. h., etwa $\mu = 2$ setzend, $z_1 = z_2$.

$$4) \quad \alpha_\nu = |\alpha_\nu| \varepsilon^{\nu+1/3}.$$

Wegen 2) folgt sofort, daß in $|z_1| > r$, $|z_2| > r$ $\Phi \neq 0$ ist, d. h. aber, daß $S\{\mathfrak{F}_r\} \leq r$. Da aber gewiß Funktionen existieren, die 1) und 4) erfüllen (die Bedingungen 2) bzw. 3) machen nur Einschränkungen über die Lage der Punkte z_1, z_2 und spielen als solche für die Auswahl der Schrankenfunktionen nur die in den Anm. 2), 3) erwähnte indirekte Rolle), also in $|z| \geq r$ nicht mehr schlicht sind und folglich den Schlichtheitsradius r besitzen, ist $S\{\mathfrak{F}_r\} = r$ bewiesen. Die soeben erwähnten Funktionen gehören zu den Schrankenfunktionen. Daß sie die einzigen sind, folgt aus der Tatsache, daß im Falle der Schlichtheit von $\varphi(z)$ im abgeschlossenen Kreisaußern $|z| \geq r$ bekanntlich eine Zahl R mit $1 < R < r$ existiert (jede genügend nahe unterhalb r liegende Zahl R kommt in Frage), so daß $\varphi(z)$ sogar in $|z| > R$ noch schlicht ist, also $\sigma\{\varphi\} \leq R < r$ ist.

Nun kann der erste Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen werden:

Satz 1. Die Schlichtheitsschranke der durch (3) definierten Familie $\mathfrak{F}_{k,a}$ ($k > 0$, $a > 0$) von in $|z| > 1$ meromorphen Funktionen (1) ist:

$$\begin{aligned} (8a) \quad S\{\mathfrak{F}_{k,a}\} &= \begin{cases} \left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right)^{\frac{k-1}{k}} & \text{für } k > 1, \\ a^{\frac{1}{2k}} & \text{für } k \leq 1, a > 1, \\ 1 & \text{für } k \leq 1, a \leq 1. \end{cases} \\ (8b) & \\ (8c) & \end{aligned}$$

Schrankenfunktionen sind im Falle c) alle Funktionen der Familie; in den beiden ersten Fällen sind genau die folgenden Funktionen Schrankenfunktionen:

$$\begin{aligned} (9a) \quad \varphi(z) &= \begin{cases} z + \frac{a^{\frac{1}{k-1}} \varepsilon}{1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}} \cdot \frac{1}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}}\right) \bar{\varepsilon} z - 1} & \text{im Falle a),} \\ z + \frac{a^{\frac{1}{k}} \varepsilon^2}{z} & \text{im Falle b).} \end{cases} \\ (9b) & \end{aligned}$$

wo $|\varepsilon| = 1$.

²⁾ Hier wurde 2) mitverwendet.

³⁾ Hier wurde 3) mitverwendet und $\frac{z_1}{z_1|} = \varepsilon$ gesetzt. Für $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$ ergibt sich die gleiche Bedingung, wenn man jetzt $\frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} = \varepsilon^2$ setzt.

Beweis. a) Es sei $k > 1$. Dann gilt gemäß Hilfssatz 1, A_v mit $|\alpha_v| v^{\frac{1}{k}}$, B_v mit $\frac{v^{\frac{1}{l}}}{r_0^{v+1}} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1, r_0 > 1 \right)$ identifizierend:

$$\sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}} \leq \left(\sum_{v=1}^{\infty} v |\alpha_v|^k \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{r_0^{l(v+1)}} \right)^{\frac{1}{l}}.$$

Unter Verwendung der Gleichung

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{x^{v+1}} = \left(\frac{1}{x-1} \right)^2 \quad (|x| > 1),$$

$x = r_0^l$ setzend, und der Ungleichung (3) folgt weiter:

$$\sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}} \leq a^{\frac{1}{k}} (r_0^l - 1)^{-\frac{2}{l}}.$$

Wenn also

$$a^{\frac{1}{k}} (r_0^l - 1)^{-\frac{2}{l}} = 1,$$

d. h.

$$r_0 = \left(1 + a^{\frac{l}{2k}} \right)^{\frac{1}{l}},$$

so ist

$$(10) \quad \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}} \leq 1.$$

Das Gleichheitszeichen in (10) wird genau dann erreicht, wenn es in (3) gilt und wenn außerdem (siehe Hilfssatz 1)

$$(11) \quad |\alpha_v|^k r_0^{l(v+1)} = |\alpha_1|^k r_0^{2l} \quad \text{für alle } v.$$

Für $|\alpha_1|^k$ aus (11) ergibt sich also die Bestimmungsgleichung:

$$|\alpha_1|^k r_0^{2l} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{r_0^{l(v+1)}} = a,$$

d. h.

$$|\alpha_1| = \frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}} \right)^2}.$$

$$(12) \quad |\alpha_v| = \frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 + a^{\frac{1}{2(k-1)}} \right)^{v+1}}.$$

Gemäß (10) ist die Familie $\mathfrak{F}_{k,a}$ in der Familie $\mathfrak{F}_{r_0}$ des Hilfssatzes 2 enthalten. Da aber eine nicht leere Untermenge der in jenem Hilfssatz aufgeführten Schrankenfunktionen zu $\mathfrak{F}_{k,a}$ gehört, nämlich die Menge der Funktionen $\varphi(z)$ der Form (1), die (12) und (5) erfüllen, ist

$$S\{\mathfrak{F}_{k,a}\} = S\{\mathfrak{F}_{r_0}\} = r_0.$$

Damit ist der Satz für $k > 1$ in vollem Umfang bewiesen, denn die Schrankenfunktionen (9a) berechnen sich leicht aus (12) und (5).

b) Es sei $k \leq 1$, $a > 1$. Mit der Abkürzung

$$r_0 = a^{2k}$$

ergibt sich aus (3)⁴⁾

$$\frac{|\alpha_v|}{r_0} \leq 1,$$

also

$$\left| \frac{\alpha_v}{r_0^2} \right|^k \geq \frac{|\alpha_v|}{r_0^2},$$

und weiter gemäß (4)

$$(13) \quad \frac{1}{r_0^2} \sum_{v=1}^{\infty} v |\alpha_v| \leq 1,$$

$$\frac{|\alpha_1|}{r_0^2} \leq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{v=2}^{\infty} v |\alpha_v|.$$

Demnach gilt die folgende Abschätzung:

$$(14) \quad \begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}} &\leq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{v=2}^{\infty} v |\alpha_v| + \sum_{v=2}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}}, \\ \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{|\alpha_v|}{r_0^{v+1}} &\leq 1 - \frac{1}{r_0^2} \sum_{v=2}^{\infty} \left\{ v |\alpha_v| \left(1 - \frac{1}{r_0^{v-1}} \right) \right\} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen in (14) wird offenbar genau dann erreicht, wenn $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$ und $|\alpha_1| = r_0^2 \left(= a^{2k} \right)$. Der auf (10) und die anschließende Feststellung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (10) folgende Schluß wiederholt sich nun ganz analog und führt zu den Behauptungen.

c) Es sei $k \leq 1$, $a \leq 1$. Die Herleitung von (13) bleibt im vorliegenden Fall gültig, wenn dort $r_0 = 1$ gesetzt wird. Dann lautet (13) aber

$$\sum_{v=1}^{\infty} v |\alpha_v| \leq 1.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt aber trivialerweise, daß dann $\varphi(z)$ in $|z| > 1$ schlicht ist. Damit ist schon alles bewiesen, denn die Aussage über die Schrankenfunktionen ist eine Selbstverständlichkeit.

Entsprechende Überlegungen, die aber nun nicht mehr in aller Ausführlichkeit gebracht werden sollen, können auch für die Familie

⁴⁾ (3) lautet in dieser Schreibweise:

$$\sum_{v=1}^{\infty} v \left| \frac{\alpha_v}{r_0^2} \right|^k \leq 1.$$

$\mathfrak{H}_{k,a}$ derjenigen in der Kreisscheibe $|z| < 1$ meromorphen Funktionen

$$(15) \quad \psi(z) = z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \dots$$

durchgeführt werden, die der Bedingung

$$(16) \quad \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_{\nu}|^k \leq a$$

bei festen reellen Zahlen $k > 0$, $a > 0$ genügen⁵⁾.

Zu jeder in $|z| < 1$ meromorphen Funktion $\psi(z)$ der Form (15) existieren Zahlen $\varrho \leq 1$ derart, daß $\psi(z)$ in $|z| < \varrho$ schlicht ist. Die obere Grenze aller dieser Zahlen ϱ heiße der Schlichtheitsradius von $\psi(z)$ und werde mit $\varrho\{\psi\}$ bezeichnet.

Für eine Familie $\mathfrak{H}$ von in $|z| < 1$ meromorphen Funktionen $\psi(z)$ werde

$$R\{\mathfrak{H}\} = \inf_{\psi \in \mathfrak{H}} \varrho\{\psi\}$$

als deren Schlichtheitschranke bezeichnet. Eine Funktion aus $\mathfrak{H}$, deren Schlichtheitsradius mit der Schlichtheitschranke übereinstimmt, heißt eine Schrankenfunktion.

Hilfssatz 2 besitzt folgendes Analogon, dessen Beweis sich ganz ähnlich gestaltet:

Hilfssatz 2a. Die Familie $\mathfrak{H}_r$ (r feste Zahl mit $0 < r < 1$) derjenigen in $|z| < 1$ meromorphen Funktionen $\psi(z)$ der Form (15), für die

$$(17) \quad \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_{\nu}| r^{\nu-1} \leq 1$$

gilt, besitzt die Zahl r als Schlichtheitschranke. Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen, für die in (17) das Gleichheitszeichen gilt, und für die eine Zahl ε existiert, so daß

$$\beta_{\nu} = -|\beta_{\nu}| \varepsilon^{\nu-1} \quad \text{für alle } \nu.$$

⁵⁾ Diese Funktionen sind nach CAUCHY-HADAMARD sogar regulär in $|z| < 1$.

Für $k=2$ läßt sich eine geometrische Interpretation geben, die der S. 58 analog ist: Wenn z auf einem Kreise $|z| = r < 1$ einmal umläuft, so überstreicht der Fahrstrahl, der vom Nullpunkt zu dem vermöge einer in $|z| < 1$ regulären Funktion (15) aus z entstehenden Bildpunkt $\psi(z)$ weist, eine Fläche vom (mit Vorzeichen versehenen) Inhalt:

$$\mathfrak{S}_r = \pi \left(r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_{\nu}|^2 r^{\nu} \right),$$

$$\mathfrak{S} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \mathfrak{S}_r = \pi \left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |\beta_{\nu}|^2 \right).$$

Die Familie $\mathfrak{H}_{2,a}$ ist also dadurch charakterisiert, daß

$$\mathfrak{S} \leq \pi(1+a).$$

Bemerkung (vgl. Anm.¹⁾): Die letztere Aussage des Hilfssatzes 2a ist äquivalent mit: Schrankenfunktionen sind genau diejenigen Funktionen $\psi(z)$, die auf $|z| = r$ eine Nullstelle der Ableitung besitzen.

Wie Satz 1, so läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 2. Die Schlichtheitschranke der durch (16) definierten Familie $\mathfrak{S}_{k,a}$ ($k > 0$, $a > 0$) von in $|z| < 1$ meromorphen (also regulären) Funktionen (15) ist

$$R\{\mathfrak{S}_{k,a}\} = \begin{cases} \left(1 - \sqrt{\frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{1 + a^{\frac{1}{k-1}}}}\right)^{\frac{k-1}{k}} & \text{für } k > 1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} & \text{für } k \leq 1, a > 2^{1-k}, \\ 1 & \text{für } k \leq 1, a \leq 2^{1-k}. \end{cases}$$

Schrankenfunktionen sind im Falle c) alle Funktionen der Familie; in den beiden ersten Fällen sind genau die folgenden Funktionen Schrankenfunktionen

$$\psi(z) = \begin{cases} z + a^{\frac{1}{k-1}} \alpha \varepsilon \cdot \frac{z^2}{1 - \alpha \varepsilon z}, & \alpha = \left(1 - \sqrt{\frac{a^{\frac{1}{k-1}}}{1 + a^{\frac{1}{k-1}}}}\right)^{\frac{1}{k}}, \\ z + \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \varepsilon z^2 & \end{cases}$$

im Falle a),
im Falle b),

wo $|\varepsilon| = 1$.

Wenn man von den besprochenen Familien zu Unterklassen übergeht, die aus denjenigen Funktionen $\varphi(z) \in \mathfrak{F}_{k,a}$ bzw. $\psi(z) \in \mathfrak{S}_{k,a}$ bestehen, für die $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|$ bzw. $|\beta_1|, |\beta_2|, \dots, |\beta_n|$ vorgeschriebene feste (mit (3) bzw. (16) verträgliche) Werte besitzen, so lassen sich mit den gleichen Mitteln deren Schlichtheitschranken bestimmen.

(Eingegangen am 23. Oktober 1951.)

Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I.

Von

Wolfhart Haacke in Braunschweig.

1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Lösungen eines Systems von n gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten untersucht, die von einem Parameter λ abhängen. Es sollen die Bedingungen aufgestellt werden, wann das System $2n$ linear unabhängige Lösungen besitzt, die sämtlich für hinreichend große λ beschränkte Funktionen von x sind. Diese Bedingungen ergeben sich aus einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten aus festen Funktionswerten von $2n$ speziellen Lösungsspalten des Systems zusammengesetzt sind. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht darin, die diesen speziellen Anfangsbedingungen unterworfenen Lösungen herzustellen. Dazu werden zunächst $2n$ Lösungsspalten in im Sinne der Algebra formalen Reihen nach reziproken Potenzen des Parameters hergeleitet. Durch eine von Herrn PERRON angegebene Transformation¹⁾ kann man unser System in ein solches System erster Ordnung umwandeln, für das Herr PERRON bewiesen hat, daß eine derartige formale Entwicklung gewisse Lösungen asymptotisch in dem Parameter darstellt²⁾. Mit Hilfe dieses Satzes zeigen wir, daß unsere formalen Reihen asymptotische Darstellungen von durch bestimmte Anfangsbedingungen gegebenen Integralen sind. Dieses Lösungssystem wird nun linear in das für unser Stabilitätskriterium benötigte System transformiert. Die Elemente dieser Transformationsmatrix bestimmen sich aus linearen Gleichungssystemen. Mit diesen kann man dann bis auf einen asymptotisch angebbaren Fehler die Stabilitätsgleichung bilden. Sind alle Koeffizienten des Differentialgleichungssystems gerade periodische Funktionen, so vereinfacht sich die Stabilitätsgleichung für hinreichend große Werte des Parameters zu einem System von n simultanen Gleichungen. Diese werden dann für den Fall gerader reeller

¹⁾ [9]: [] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

²⁾ Ähnliche Untersuchungen über Systeme erster Ordnung enthalten unter anderen auch folgende Arbeiten: [1], [5], [8].

Koeffizientenfunktionen diskutiert. So gelingt es, aus der in einem Periodenintervall gültigen Darstellung der Lösung auf ihr infinitäres Verhalten zu schließen.

Unabhängig von asymptotischen Darstellungen sind zahlreiche Stabilitätsuntersuchungen für Systeme erster und zweiter Ordnung bekannt³⁾. Doch diese Klasse von Untersuchungen setzt beschränkte Variation oder absolute Integrierbarkeit bis Unendlich für die Koeffizientenfunktionen voraus, was hier nicht gefordert werden kann. Über die Stabilität von Systemen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten für kleine Werte des von uns als groß angesehenen Parameters haben mehrere italienische Autoren gearbeitet, besonders sei die Arbeit von Herrn CESARI erwähnt⁴⁾. Ein gewisser Zusammenhang dieser Untersuchung mit der großen Zahl der Arbeiten über asymptotische Darstellungen der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung⁵⁾ sei erwähnt. Schließlich soll noch eine Untersuchung von Herrn METTLER [7] genannt werden, der das System

$$\ddot{\eta} + \mathfrak{K} \dot{\eta} + \varepsilon \cos x \mathfrak{L} \eta = 0$$

für reelle konstante Koeffizientenmatrizen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ und kleine Parameter ε formal löst.

2. Die allgemeine Stabilitätstheorie.

Zunächst werden wir die bekannten Sätze der Theorie der Systeme mit periodischen Koeffizienten, die wir benötigen, zusammenstellen [7], [10]: Ein System

$$(1) \quad \ddot{\eta} + \mathfrak{M}(x) \dot{\eta} = 0 \quad (6)$$

mit mod 2π periodischem stetigen $\mathfrak{M}(x)$ besitzt $2n$ linear unabhängige Lösungsspalten u_r ⁷⁾, deren Komponenten $u_{1r}(x), \dots, u_{nr}(x)$ seien. Diese fassen wir in eine Matrix $\mathfrak{U}$ vom Typ $(n, 2n)$ zusammen. Die Spalten u_r seien so bestimmt, daß

$$(2) \quad u_{\mu r}(a) = \delta_{\mu r}, \quad \frac{d u_{\mu r}(a)}{dx} = \delta_{\mu+n, r}$$

gilt. Dann sind die $2n$ Lösungsspalten sicher linear unabhängig. Da die Koeffizienten von (1) mod 2π periodisch sind, ist mit $\mathfrak{U}(x)$ auch $\mathfrak{U}(x+2\pi)$ Lösung von (1). Also gilt mit einer konstanten $(2n, 2n)$ Matrix $\mathfrak{F}^{(2n)}$:

$$(3) \quad \mathfrak{U}(x+2\pi) = \mathfrak{U}(x) \mathfrak{F}^{(2n)}.$$

³⁾ Z. B. [2].

⁴⁾ [3]. Hier werden Kriterien angegeben, wann für hinreichend kleine Parameter λ , d. h. in der Umgebung von $\lambda = 0$, Stabilität vorliegt.

⁵⁾ Z. B. [4], [6], [11].

⁶⁾ ' bedeute immer Ableitung nach x .

⁷⁾ Wir wollen verabreden, daß q immer von 0 bis ∞ , r und s von 1 bis $2n$ und μ, ν von 1 bis n laufen sollen.

Wir suchen jetzt spezielle Lösungsspalten $\mathfrak{v}(x)$ derart, daß

$$(4) \quad \mathfrak{v}(x + 2\pi) = \sigma \cdot \mathfrak{v}(x)$$

bei konstantem σ wird. Dann muß sich $\mathfrak{v}$ bei konstanter Spalte $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{v} = \mathfrak{U}\mathfrak{c}$ bestimmen lassen. Nun ist aber $\mathfrak{v}(x + 2\pi)$ einerseits gleich $\sigma \cdot \mathfrak{v}(x) = \sigma \cdot \mathfrak{U}(x)\mathfrak{c}$, andererseits aber auch gleich

$$\mathfrak{U}(x + 2\pi)\mathfrak{c} = \mathfrak{U}(x)\mathfrak{F}^{(2n)}\mathfrak{c}.$$

Also: $\mathfrak{U}(x)(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{F}^{(2n)})\mathfrak{c} = 0$. Da die Spalten von $\mathfrak{U}(x)$ ein Fundamentalsystem bilden, bestimmt sich σ aus

$$(5) \quad \det(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{F}^{(2n)}) = 0.$$

Aus (2) und (3) folgt, daß die Elemente von $\mathfrak{F}^{(2n)}$: $f_{\mu r} = u_{\mu r}(a + 2\pi)$ und $f_{\mu+n, r} = \frac{du_{\mu r}(a + 2\pi)}{dx}$ sind. Die Fundamentalgleichung (5) ist bekanntlich von der Wahl des Ausgangssystems unabhängig.

Wenn speziell die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{M}$ nur bzgl. $x = a$ gerade periodische Funktionen enthält, läßt sich die Determinantengleichung (5) auf den n -ten Grad reduzieren. Mit $\mathfrak{v}(x)$ ist dann nämlich auch $\mathfrak{v}(2a - x) = \mathfrak{v}^*(x)$ Lösung von (1). Also ist $\mathfrak{v}^*(x + 2\pi) = \frac{1}{\sigma} \mathfrak{v}^*(x)$.

$$\text{Mit } \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{c}^* = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ -c_{n+1} \\ \vdots \\ -c_{2n} \end{pmatrix} \text{ gilt wegen (2): } \mathfrak{v}^* = \mathfrak{U}\mathfrak{c}^*.$$

Die dazu gehörige Fundamentalgleichung lautet:

$$\mathfrak{U}(x)(\mathfrak{F}^{(2n)} - \frac{1}{\sigma}\mathfrak{F}^{(2n)})\mathfrak{c}^* = 0.$$

Addieren wir zu den ersten n Gleichungen von $(\mathfrak{F}^{(2n)} - \frac{1}{\sigma}\mathfrak{F}^{(2n)})\mathfrak{c}^* = 0$ die entsprechenden Gleichungen von $(\mathfrak{F}^{(2n)} - \sigma\mathfrak{F}^{(2n)})\mathfrak{c} = 0$, so ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante ebenfalls verschwinden muß⁸⁾. Diese lautet:

$$(6) \quad \det(\mathfrak{F}^{(n)} - \cos 2\pi\tau\mathfrak{F}^{(n)}) = 0,$$

⁸⁾ Hierbei ist $\mathfrak{c}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$ vorausgesetzt. Mit $\mathfrak{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix}$ schreiben sich die

ersten n Gleichungen des Ausgangssystems

$$(\mathfrak{F}^{(n)} - \sigma\mathfrak{F}^{(n)})\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{c}_2 = 0.$$

Dabei braucht wohl die Bedeutung von $\mathfrak{F}_2$ nicht erklärt zu werden. Ist $\mathfrak{c}_1 = 0$, so muß wegen $\mathfrak{c} \neq 0$ $\det \mathfrak{F}_2 = 0$ sein. In $\mathfrak{F}_2$ stehen die zweiten n Lösungsspalten von (1) an der Stelle $x = a + 2\pi$. Daher kann $\det \mathfrak{F}_2$ nicht verschwinden. Also kann $\mathfrak{c}_1 = 0$ nicht eintreten.

wenn

$$(7) \quad \sigma = e^{2\pi i \tau}$$

gesetzt ist. Dabei enthält $\mathfrak{F}^{(n)}$ die ersten n Zeilen und Spalten von $\mathfrak{F}^{(2n)}$. Ist $\cos 2\pi\tau$ Wurzel von (6), so ergeben sich daraus wegen (7) zwei Wurzeln für σ , so daß wir insgesamt $2n$ (nicht notwendig verschiedene) Wurzeln von (5) erhalten. Falls (6) mehrfache Wurzeln oder Wurzeln der Form $\cos 2\pi\tau = \pm 1$ besitzt, hat (5) mehrfache Wurzeln. In diesem Fall läßt sich im allgemeinen ein Fundamentalsystem nicht mehr vollständig aus Integralen vom Typ (4) aufbauen. Es treten Funktionen hinzu, die außer periodischen und exponentiellen Faktoren auch Potenzen von x als Faktoren enthalten. Nur bei speziellen Anfangsbedingungen und in dem Fall, daß alle Elementarbestandteile der Matrix $\mathfrak{F}^{(2n)}$ verschieden sind, treten diese Potenzen von x nicht auf [10]. Solche Lösungen nennen wir labil, während bei einer stabilen Lösung die zugehörige Größe $\cos 2\pi\tau$ reell, von allen anderen verschieden und vom Betrage kleiner als eins sein muß⁹⁾. In diesem Falle ist σ immer vom Betrage eins: die Lösung ist fastperiodisch. Alle anderen Wurzeln bewirken zum Teil exponentiell unbeschränkte Lösungen, die also instabil sind.

3. Die asymptotische Darstellung der Lösung.

Wir wollen nun asymptotische Darstellungen bezüglich λ der Lösungen des in Vektorform gegebenen Systems

$$(8) \quad \eta'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x) \eta + \lambda \mathfrak{A}(x, \lambda) \eta = 0^{10)}$$

untersuchen. Der Parameter λ sei auf reelle positive Werte beschränkt. Die Matrix $\mathfrak{R}(x, \lambda)$ sei in $a \leq x \leq a + 2\pi$ gleichmäßig für $\lambda \rightarrow \infty$ folgender asymptotischen Reihe gleich: $\mathfrak{R}(x, \lambda) \sim \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{R}^{(q)}(x)^{11)}$.

$\mathfrak{R}^{(q)}(x)$ und $\mathfrak{R}(x)$ seien in $a \leq x \leq a + 2\pi$ stetige und unendlich oft differenzierbare n -reihige quadratische Matrizenfunktionen, die die Periode 2π haben. Weiter sei $\mathfrak{R}(x) = \{\delta_{\mu\nu} r_{\mu}^2(x)\}$ mit $r_{\mu}^2 \neq r_{\nu}^2$ (für $\mu \neq \nu$) und $r_{\mu}^2 \neq 0$ für alle x im Intervall $a \leq x \leq a + 2\pi$. Sonst seien die Funktionen $r_{\mu}^2(x)$ und $a_{\mu\nu}^{(q)}(x)$ beliebig komplexwertig.

⁹⁾ Diese Bezeichnung überträgt man in folgender Weise auf das Differentialgleichungssystem: Sind alle $2n$ Lösungen stabil, so heiße (1) stabil, gibt es außer stabilen auch labile Lösungen, aber keine instabilen, so heiße (1) labil. In jedem anderen Fall werde (1) instabil genannt.

¹⁰⁾ An Stelle der Diagonalmatrix $\mathfrak{R}$ kann auch eine Matrix $\mathfrak{B}(x) = f(x)\mathfrak{C}$ zugelassen werden. Dabei sei $\mathfrak{C}$ eine Hermitesche Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Die Schwankungen der mod 2π periodischen Funktion $f(x)$ seien kleiner als die kleinste Differenz zweier Eigenwerte der Matrix. Dann läßt sich dieses System durch unitäre Transformation in das System (8) umwandeln.

¹¹⁾ (q) sei ein Index, keine Ableitung.

Für unsere Untersuchung wird es zweckmäßig sein, zunächst an Stelle der Vektorgleichung (8) eine äquivalente Matrizengleichung

$$(9) \quad \mathfrak{Y}'' + \lambda^2 \mathfrak{R}(x) \mathfrak{Y} + \lambda \mathfrak{A}(x, \lambda) \mathfrak{Y} = 0$$

zu betrachten, in der die (n, n) Matrix $\mathfrak{Y}$ aus n Lösungsspalten von (8) aufgebaut ist. Wir werden in unserer Lösung zwei Vorzeichenmöglichkeiten erhalten, deren jede n Spalten ergibt, so daß wir insgesamt $2n$ Lösungsspalten bekommen, deren lineare Unabhängigkeit dann noch gezeigt werden muß.

Zur Lösung von (9) machen wir den zunächst rein formalen Ansatz

$$(10) \quad \mathfrak{Y} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{P}^{(q)}(x) \cdot \mathfrak{S}(x, \lambda).$$

Dabei sei mit noch unbestimmten Funktionen $k_\mu(x)$ und $l_\mu(x)$

$$\mathfrak{S}(x, \lambda) = \{\delta_{\mu\nu} \exp [\pm i \int_a^x (\lambda k_\mu(\xi) + l_\mu(\xi)) d\xi]\};$$

außerdem sei $\mathfrak{R} = \{\delta_{\mu\nu} k_\mu(x)\}$ und $\mathfrak{L} = \{\delta_{\mu\nu} l_\mu(x)\}$.

Durch formale gliedweise Differentiation ergibt sich

$$(11) \quad \mathfrak{Y}'' = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \{\mathfrak{P}^{(q)''} \pm 2i\lambda \mathfrak{P}^{(q)'} \mathfrak{R} \pm 2i \mathfrak{P}^{(q)'} \mathfrak{L} - \lambda^2 \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{R}^2 \\ - 2\lambda \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{R} \mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{L}^2 \pm i\lambda \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{R}' \pm i \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{L}'\} \mathfrak{S}.$$

Führen wir (10) und (11) formal in (9) ein und setzen dann die Matrizenfunktionen der einzelnen Potenzen von λ gleich Null, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -\mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R} \mathfrak{P}^{(0)} = 0, \\ & \pm 2i \mathfrak{P}^{(0)'} \mathfrak{R} - \mathfrak{P}^{(1)} \mathfrak{R}^2 - 2\mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{R} \mathfrak{L} \pm i \mathfrak{P}^{(0)'} \mathfrak{R}' + \mathfrak{R} \mathfrak{P}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(0)} \mathfrak{P}^{(0)} = 0, \\ & \mathfrak{P}^{(0)''} \pm 2i \mathfrak{P}^{(1)'} \mathfrak{R} \pm 2i \mathfrak{P}^{(0)'} \mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(2)} \mathfrak{R}^2 - 2\mathfrak{P}^{(1)} \mathfrak{R} \mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{L}^2 \pm i \mathfrak{P}^{(1)} \mathfrak{R}' \pm i \mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{L}' \\ & + \mathfrak{R} \mathfrak{P}^{(2)} + \mathfrak{A}^{(0)} \mathfrak{P}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(1)} \mathfrak{P}^{(0)} = 0 \end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}^{(q-2)''} \pm 2i \mathfrak{P}^{(q-1)'} \mathfrak{R} \pm 2i \mathfrak{P}^{(q-2)'} \mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(q)} \mathfrak{R}^2 - 2\mathfrak{P}^{(q-1)} \mathfrak{R} \mathfrak{L} - \mathfrak{P}^{(q-2)} \mathfrak{L}^2 \\ & \pm i \mathfrak{P}^{(q-1)} \mathfrak{R}' \pm i \mathfrak{P}^{(q-2)} \mathfrak{L}' + \mathfrak{R} \mathfrak{P}^{(q)} + \sum_{\gamma=0}^{q-1} \mathfrak{A}^{(\gamma)} \mathfrak{P}^{(q-1-\gamma)} = 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird durch $k_\nu = r_\nu$ und $p_{\mu\nu}^{(0)} = 0$ für $\mu \neq \nu$ befriedigt. Die zweite Gleichung ergibt dann

$$p_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{a_{\mu\nu}^{(0)} p_{\nu\nu}^{(0)}}{r_\nu^2 - r_\mu^2}$$

für $\mu \neq \nu$ und für $\mu = \nu$:

$$p_{\mu\mu}^{(0)'} + \frac{\pm i k_\mu' - 2k_\mu l_\mu + a_{\mu\mu}^{(0)}}{\pm 2i k_\mu} p_{\mu\mu}^{(0)} = 0.$$

Hier setzen wir

$$l_{\mu} = \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}}{2k_{\mu}} = \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}}{2r_{\mu}}.$$

Dann ist

$$p_{\mu\mu}^{(0)} = \frac{c_{\mu}^{(0)}}{\sqrt{r_{\mu}}}.$$

So lassen sich sukzessive alle Elemente der Matrizen $\mathfrak{P}^{(\omega)}(x)$ bestimmen. Die bei den Diagonalelementen auftretenden Integrationskonstanten seien fest gewählt, desgleichen die Zweige der mehrdeutigen Funktionen. Durch die beiden Vorzeichenmöglichkeiten erhalten wir so zwei formale Darstellungen der Gestalt (10). Da wir für die Stabilitätsuntersuchung $p_{\mu\mu}^{(1)}$ benötigen, wollen wir diese Funktionen noch berechnen. Dazu setzen wir

$$s_{\mu}(x) = \frac{1}{2r_{\mu}^2} \left(\frac{a_{\mu\mu}^{(0)} r'_{\mu}}{r_{\mu}} - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)'} }{2} \right)$$

und

$$t_{\mu}(x) = \frac{1}{2r_{\mu}} \left(\sum_{x \neq \mu} \frac{a_{\mu x}^{(0)} a_{x\mu}^{(0)}}{r_{\mu}^2 - r_x^2} - \frac{r''_{\mu}}{2r_{\mu}} + \frac{3r_{\mu}^{\prime 2}}{4r_{\mu}^2} + a_{\mu\mu}^{(1)} - \frac{a_{\mu\mu}^{(n)2}}{4r_{\mu}^2} \right).$$

Dann bestimmt sich $p_{\mu\mu}^{(1)}$ aus der Differentialgleichung

$$p_{\mu\mu}^{(1)'} + \frac{r'_{\mu}}{2r_{\mu}} p_{\mu\mu}^{(1)} = \frac{c_{\mu}^{(n)}}{\sqrt{r_{\mu}}} (s_{\mu} \pm i t_{\mu}).$$

Es ist also

$$p_{\mu\mu}^{(1)} = \frac{c_{\mu}^{(n)}}{\sqrt{r_{\mu}}} \left(c_{\mu}^{(1)} + \int_a^x (s_{\mu}(\xi) \pm i t_{\mu}(\xi)) d\xi \right).$$

In dem formalen Ansatz (10) setzen wir jetzt $x = a$. Nach einem Satz von Herrn PERRON¹²⁾ existiert zu jeder formalen Reihe in $\frac{1}{\lambda}$ eine stetige Funktion, deren asymptotische Darstellung diese Reihe ist. Also gibt es eine Funktion $\mathfrak{B}(a, \lambda)$ von λ so, daß

$$(12a) \quad \mathfrak{B}(a, \lambda) \sim \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{P}^{(q)}(a) \mathfrak{S}(a, \lambda).$$

Wir bilden formal die erste Ableitung von (10):

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} = & \pm i \lambda \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{P}^{(q)}(x) \mathfrak{R}(x) \mathfrak{S}(x, \lambda) \pm i \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{P}^{(q)}(x) \mathfrak{Y}(x) \mathfrak{S}(x, \lambda) \\ & + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^q} \mathfrak{P}^{(q)'}(x) \mathfrak{S}(x, \lambda). \end{aligned}$$

¹²⁾ [9]. II. S. 6.

Setzen wir wieder $x = a$, so gibt es eine Funktion $\mathfrak{B}^*(a, \lambda)$ von λ so, daß

$$(12b) \quad \mathfrak{B}^*(a, \lambda) \sim \pm i \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \mathfrak{P}^{(\varrho)}(a) \mathfrak{R}(a) \mathfrak{S}(a, \lambda) \\ \pm i \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \mathfrak{P}^{(\varrho)}(a) \mathfrak{L}(a) \mathfrak{S}(a, \lambda) + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \mathfrak{P}^{(\varrho)'}(a) \mathfrak{S}(a, \lambda).$$

Wir wollen nun zeigen, daß (10) die asymptotische Darstellung derjenigen $2n$ Lösungsspalten ist, die durch die Anfangswerte $\mathfrak{B}(a, \lambda)$ und die Anfangsableitungen $\mathfrak{B}^*(a, \lambda)$ bestimmt sind. Zum Beweis transformieren wir unser System in ein System erster Ordnung mit Hilfe einer Methode, die Herr PERRON¹³⁾ auf eine Differentialgleichung n -ter Ordnung angewandt hat. Dazu schreiben wir (9) zunächst skalar:

$$(13) \quad y''_{\mu r} + \lambda^2 r_{\mu}^2(x) y_{\mu r} + \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\mu\kappa}^{(\varrho)}(x) y_{\kappa r} = 0.$$

Wir setzen jetzt

$$(14) \quad y_{\mu r} = z_{\mu r} + z_{\mu+n, r} \\ y'_{\mu r} = i \lambda r_{\mu} (z_{\mu r} - z_{\mu+n, r}).$$

Dann ist

$$y''_{\mu r} = i \lambda r'_{\mu} (z_{\mu r} - z_{\mu+n, r}) + i \lambda r_{\mu} (z'_{\mu r} - z'_{\mu+n, r}) \\ = -\lambda^2 r_{\mu}^2 (z_{\mu r} + z_{\mu+n, r}) - \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\mu\kappa}^{(\varrho)} (z_{\kappa r} + z_{\kappa+n, r}).$$

Außerdem ist

$$y'_{\mu r} = z'_{\mu r} + z'_{\mu+n, r} = i \lambda r_{\mu} (z_{\mu r} - z_{\mu+n, r}).$$

Die beiden letzten Gleichungen sehen wir als System für $z'_{\mu r}$ und $z'_{\mu+n, r}$ an. Die Auflösung ist wegen $r_{\mu} \neq 0$ immer möglich und ergibt:

$$(15) \quad z'_{\mu r} = i \lambda r_{\mu} z_{\mu r} - \frac{r'_{\mu}}{2 r_{\mu}} (z_{\mu r} - z_{\mu+n, r}) \\ + \frac{i}{2 r_{\mu}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\mu\kappa}^{(\varrho)} (z_{\kappa r} + z_{\kappa+n, r}), \\ z'_{\mu+n, r} = -i \lambda r_{\mu} z_{\mu+n, r} + \frac{r'_{\mu}}{2 r_{\mu}} (z_{\mu r} - z_{\mu+n, r}) \\ - \frac{i}{2 r_{\mu}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\varrho}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\mu\kappa}^{(\varrho)} (z_{\kappa r} + z_{\kappa+n, r}).$$

Durch Umbenennung läßt sich immer erreichen, daß die Realteile der Faktoren von λz_{sr} ($s = 1, \dots, 2n$) der Größe nach geordnet sind, wobei gleiche Realteile zugelassen sind. Einem Ausdruck (10), der formal (9) Genüge tut, entsprechen nun wegen (14) gewisse Ausdrücke $z_{11}, \dots, z_{2n, 2n}$, die (15) formal befriedigen. Umgekehrt entspricht jeder formalen Lösung von (15) auch eine formale Lösung von (9). Das System (15) hat genau

¹³⁾ [9]. II. S. 26.

die Gestalt, für die Herr PERRON bewiesen hat¹⁴⁾, daß diese formalen Lösungen zugleich asymptotische Darstellungen von Lösungen von (15) gleichmäßig in $a \leq x \leq a + 2\pi$ sind. Wegen der Zuordnung von (9) und (15) sind die zugehörigen Lösungen, die asymptotisch dargestellt werden, genau die, deren Anfangswerte $\mathfrak{B}(a, \lambda)$ und $\mathfrak{B}^*(a, \lambda)$ sind. Im nächsten Abschnitt muß aber noch gezeigt werden, daß die $2n$ Lösungsspalten, die durch $\mathfrak{B}(a, \lambda)$ und $\mathfrak{B}^*(a, \lambda)$ bestimmt sind, linear unabhängig sind.

4. Die Herleitung der Stabilitätsgleichung.

Im Abschnitt 2 haben wir die Sätze zusammengestellt, die wir zur Ableitung der Stabilitätsgleichung benötigen. Wir brauchen ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U}$, das der Bedingung (2) genügt. Dann müssen die Werte $f_{\mu r} = u_{\mu, r}(a + 2\pi)$ und $f_{\mu+n, r} = \frac{d u_{\mu r}(a + 2\pi)}{dx}$ bestimmt werden. Dazu gehen wir von (10) aus und betrachten die asymptotische Darstellung bis auf $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$:

$$(16) \quad \begin{aligned} y_{\mu\mu} &= \frac{1}{\sqrt{r_\mu}} e^{+i\lambda q_\mu(x, \lambda)} \left[1 + \frac{1}{\lambda} (S_\mu^*(x) \pm iT_\mu^*(x)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \text{ für } \mu = \nu \text{ und} \\ y_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{r_\nu}} e^{\pm i\lambda q_\nu(x, \lambda)} \left[\frac{h_{\mu\nu}(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \text{ für } \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(17) \quad \begin{cases} S_\mu^*(x) = \int_a^x s_\mu(\xi) d\xi, & T_\mu^*(x) = \int_a^x t_\mu(\xi) d\xi, \\ q_\nu(x, \lambda) = \int_a^x \left[r_\nu(\xi) + \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(\xi)}{2\lambda r_\mu(\xi)} \right] d\xi \text{ und} \\ h_{\mu\nu}(x) = \frac{a_{\mu\nu}^{(0)}(x)}{r_\nu^3(x) - r_\mu^2(x)}. \end{cases}$$

Weiter haben wir $c_\mu^{(0)} = 1$ gesetzt, was nur eine unwesentliche Normierung der Spalten von $\mathfrak{U}$ bedeutet. Außerdem haben wir $c_\mu^{(1)} = 0$ festgelegt. Die Berechtigung dazu zeigen wir dadurch, daß es uns trotzdem gelingt, (16) in die Form $\mathfrak{U}$ linear zu transformieren. Damit wäre zugleich die lineare Unabhängigkeit der Lösungsspalten gezeigt. Es ist

$$(18) \quad S_\mu^*(a) = T_\mu^*(a) = q_\mu(a, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad h_{\mu\nu}(a) = h_{\mu\nu}(a + 2\pi).$$

Es wird zweckmäßig sein, folgende weitere Abkürzungen einzuführen:

$$(19) \quad \begin{aligned} h_{\mu\nu}(a) &= H_{\mu\nu}, \quad q_\mu(a + 2\pi, \lambda) = Q_\mu, \\ S_\mu^*(a + 2\pi) &= S_\mu, \quad T_\mu^*(a + 2\pi) = T_\mu, \quad \frac{1}{\sqrt{r_\mu(a)}} = \frac{1}{\sqrt{r_\mu(a + 2\pi)}} = R_\mu \\ \text{und} \\ i q'_\mu(a, \lambda) \mp \frac{r'_\mu(a)}{2\lambda r_\mu(a)} &= P_{\mu\gamma} \text{ bei } \gamma = 1, 2. \end{aligned}$$

¹⁴⁾ [9]. II. S. 18.

Wir machen also jetzt den Ansatz

$$(20) \quad \mathfrak{U} = \{\mathfrak{Y}^{(1)} \mathfrak{Y}^{(2)}\} \mathfrak{G}.$$

Dabei ist $\mathfrak{G}$ eine noch unbekannte konstante Matrix vom Typ $(2n, 2n)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_{\mu r} &= \sum_{\kappa \neq \mu} \frac{1}{\sqrt{r_{\kappa}}} (e^{i\lambda q_{\kappa}} g_{\kappa r} + e^{-i\lambda q_{\kappa}} g_{\kappa+n, r}) \left[\frac{h_{\mu\kappa}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{r_{\mu}}} \left[e^{i\lambda q_{\mu}} g_{\mu r} \left(1 + \frac{1}{\lambda} (S_{\mu}^* + iT_{\mu}^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\lambda q_{\mu}} g_{\mu+n, r} \left(1 + \frac{1}{\lambda} (S_{\mu}^* - iT_{\mu}^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \right], \\ u'_{\mu r} &= \sum_{\kappa \neq \mu} \frac{i q'_{\kappa}}{\sqrt{r_{\kappa}}} (e^{i\lambda q_{\mu}} g_{\kappa r} - e^{-i\lambda q_{\kappa}} g_{\kappa+n, r}) \left(h_{\mu\kappa} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \\ &\quad - \frac{r'_{\mu}}{2 r_{\mu}^{3/2}} (e^{i\lambda q_{\mu}} g_{\mu r} + e^{-i\lambda q_{\mu}} g_{\mu+n, r}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \\ &\quad + \frac{i\lambda q'_{\mu}}{\sqrt{r_{\mu}}} \left[e^{i\lambda q_{\mu}} g_{\mu r} \left(1 + \frac{1}{\lambda} (S_{\mu}^* + iT_{\mu}^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\lambda q_{\mu}} g_{\mu+n, r} \left(1 + \frac{1}{\lambda} (S_{\mu}^* - iT_{\mu}^*) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Forderung (2) ergibt bei Benutzung von (17), (18) und (19):

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \neq \mu} R_{\kappa} (g_{\kappa r} + g_{\kappa+n, r}) \frac{H_{\mu\kappa}}{\lambda} + R_{\mu} (g_{\mu r} + g_{\mu+n, r}) &= \delta_{\mu r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ \sum_{\kappa \neq \mu} R_{\kappa} (P_{\kappa 1} g_{\kappa r} - P_{\kappa 2} g_{\kappa+n, r}) H_{\mu\kappa} + \lambda R_{\mu} (P_{\mu 1} g_{\mu r} - P_{\mu 2} g_{\mu+n, r}) &= \delta_{\mu+n, r} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$G_{\mu r} = R_{\mu} (g_{\mu r} + g_{\mu+n, r})$$

und

$$\bar{G}_{\mu r} = \lambda R_{\mu} (P_{\mu 1} g_{\mu r} - P_{\mu 2} g_{\mu+n, r}),$$

so zerlegen wir unser lineares Gleichungssystem in zwei Teilsysteme, nämlich

$$\sum_{\kappa \neq \mu} G_{\kappa r} \frac{H_{\mu\kappa}}{\lambda} + G_{\mu r} = \delta_{\mu r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

und

$$\sum_{\kappa \neq \mu} \bar{G}_{\kappa r} \frac{H_{\mu\kappa}}{\lambda} + \bar{G}_{\mu r} = \delta_{\mu+n, r} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Da die Koeffizienten der linken Seiten nicht von r abhängen, können die Systeme für jedes r gesondert gelöst werden. Die Koeffizientendeterminanten haben den Wert $1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Also sind alle

$$G_{\mu, \mu+n} = G_{\mu, \nu+n} = \bar{G}_{\mu\mu} = \bar{G}_{\mu\nu} = 0.$$

Weiter ist $G_{\mu\mu} = \bar{G}_{\mu, \mu+n} = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, $G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu, \nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ für $\mu \neq \nu$.

Dann bestimmen sich die $g_{\mu r}$ und $g_{\mu+n, r}$ aus Systemen linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, deren Koeffizientendeterminanten

den Wert $-\lambda R_\mu^2(P_{\mu 1} + P_{\mu 2}) = -2i\lambda - i \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{r_\mu^2(a)}$ haben, für hinreichend großes λ also sicher nicht verschwinden. Daher ist

$$g_{\mu r} = \frac{\lambda G_{\mu r} P_{\mu 2} + \bar{G}_{\mu r}}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1} + P_{\mu 2})} \quad \text{und} \quad g_{\mu+n, r} = \frac{\lambda G_{\mu r} P_{\mu 1} - \bar{G}_{\mu r}}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1} + P_{\mu 2})}.$$

Setzen wir die Werte für die G und $\bar{G}$ ein, so erhalten wir:

$$g_{\mu\mu} = \frac{P_{\mu 2}}{R_\mu} \frac{1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{P_{\mu 1} + P_{\mu 2}}, \quad g_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad g_{\mu+n, \mu} = \frac{P_{\mu 1}}{R_\mu} \frac{1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{P_{\mu 1} + P_{\mu 2}}, \quad g_{\mu+n, \nu} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$g_{\mu, \mu+n} = -g_{\mu+n, \mu+n} = \frac{1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\lambda R_\mu (P_{\mu 1} + P_{\mu 2})}, \quad g_{\mu, \nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad g_{\mu+n, \nu+n} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Jetzt sollen die Elemente von $\mathfrak{F}^{(2n)}$ bestimmt werden. Allgemein ist

$$\begin{aligned} u_{\mu r}(a + 2\pi) &= \sum_{x \neq \mu} R_x (e^{i\lambda Q_x} g_{xr} + e^{-i\lambda Q_x} g_{x+n, r}) \left[\frac{H_{\mu x}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] \\ &+ R_\mu \left[e^{i\lambda Q_\mu} g_{\mu r} \left(1 + \frac{S_\mu + iT_\mu}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) + e^{-i\lambda Q_\mu} g_{\mu+n, r} \left(1 + \frac{S_\mu - iT_\mu}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \right], \\ u'_{\mu r}(a + 2\pi) &= \sum_{x \neq \mu} R_x (P_{x1} e^{i\lambda Q_x} g_{xr} - P_{x2} e^{-i\lambda Q_x} g_{x+n, r}) \left(H_{\mu x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \\ &+ \lambda R_\mu (P_{\mu 1} e^{i\lambda Q_\mu} g_{\mu r} - P_{\mu 2} e^{-i\lambda Q_\mu} g_{\mu+n, r}) \\ &+ i q'_\mu(a, \lambda) R_\mu \left[g_{\mu r} \left(S_\mu + iT_\mu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda Q_\mu} - g_{\mu+n, r} \left(S_\mu - iT_\mu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) e^{-i\lambda Q_\mu} \right]. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{P_{\mu\gamma}}{P_{\mu 1} + P_{\mu 2}} &= \frac{i q'_\mu(a) \mp \frac{r'_\mu(a)}{2\lambda r_\mu(a)}}{2i q'_\mu(a)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{r'_\mu(a)}{2i\lambda r_\mu(a) q'_\mu(a)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{r'_\mu(a)}{2i\lambda r_\mu^2(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{\mu\mu}(a + 2\pi) &= \cos \lambda Q_\mu \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left[S_\mu \cos \lambda Q_\mu + \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r_\mu^2(a)} - T_\mu \right) \sin \lambda Q_\mu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ u_{\mu, \mu+n}(a + 2\pi) &= \frac{\sin \lambda Q_\mu}{\lambda r_\mu(a)} \\ (21) \quad &+ \frac{1}{\lambda^2 r_\mu(a)} \left[\left(S_\mu - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{2r_\mu^2(a)} \right) \sin \lambda Q_\mu + T_\mu \cos \lambda Q_\mu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \\ u'_{\mu, \mu}(a + 2\pi) &= -\lambda r_\mu(a) \sin \lambda Q_\mu \\ &- r_\mu(a) \left[\left(S_\mu + \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(a)}{2r_\mu^2(a)} \right) \sin \lambda Q_\mu + T_\mu \cos \lambda Q_\mu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \\ u'_{\mu, \mu+n}(a + 2\pi) &= \cos \lambda Q_\mu \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left[S_\mu \cos \lambda Q_\mu - \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r_\mu^2(a)} + T_\mu \right) \sin \lambda Q_\mu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$u_{\mu\nu}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad u'_{\mu\nu}(a+2\pi) = O(1),$$

$$u_{\mu, \nu+n}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad u'_{\mu, \nu+n}(a+2\pi) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Damit können wir jetzt (5) bilden. Zunächst folgende Bezeichnungs-
erklärungen: $\sum_{(\nu)} \prod^{(\nu)}$ bedeute die Summe über alle möglichen Pro-
dukte von $(n-\nu)$ Faktoren aus n möglichen Faktoren. $\prod^{(\nu)*}$ bedeute
das Produkt von genau den ν Faktoren, deren Indizes in $\prod^{(\nu)}$ nicht
auftreten. Unter Benutzung des LAPLACESchen Entwicklungssatzes er-
halten wir dann folgendes Ergebnis:

*Das System (8) besitzt genau dann für alle x beschränkte Lö-
sungen, wenn alle $2n$ Wurzeln σ der Gleichung*

$$(5a) \quad \sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu \sum_{(\nu)} \{ \prod^{(\nu)} [u_{\nu\nu}(a+2\pi) - \sigma] \cdot [u'_{\nu, \nu+n}(a+2\pi) - \sigma] \\ \times \prod^{(\nu)*} u_{\nu, \nu+n}(a+2\pi) \cdot u'_{\nu\nu}(a+2\pi) \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

den Betrag eins haben, ohne daß $\sigma = \pm 1$ gilt.

Spezialisiert man sich auf bzgl. $x = a$ gerade Matrizen $\Re$ und $\mathfrak{A}$,
so ergibt sich

$$\prod_{\mu=1}^n \left\{ \cos \lambda Q_\mu \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} \left[S_\mu \cos \lambda Q_\mu + \left(\frac{r'_\mu(a)}{2r_\mu^2(a)} - T_\mu \right) \sin \lambda Q_\mu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - \cos 2\pi \tau_\mu \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

oder

$$\cos 2\pi \tau_\nu = \cos \lambda Q_\nu + \frac{1}{\lambda} \left[S_\nu \cos \lambda Q_\nu + \left(\frac{r'_\nu(a)}{2r_\nu^2(a)} - T_\nu \right) \sin \lambda Q_\nu \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ (\nu = 1 \dots n).$$

Damit erhalten wir:

*Sind die Matrizen $\Re$ und $\mathfrak{A}$ bzgl. $x = a$ gerade, so ist das System
(8) stabil, falls alle n rechten Seiten der „Stabilitätsgleichung“*

$$(22) \quad \cos 2\pi \tau_\nu = \cos \left\{ \int_a^{a+2\pi} \left[\lambda r_\nu(\xi) + \frac{a_{\nu\nu}^{(0)}(\xi)}{2r_\nu(\xi)} \right] d\xi \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^{a+2\pi} \left[\frac{a_{\nu\nu}^{(0)}(\xi) r'_\nu(\xi)}{r_\nu^2(\xi)} - \frac{a_{\nu\nu}^{(0)'}(\xi)}{2r_\nu^2(\xi)} \right] d\xi \right\} \\ + \frac{1}{\lambda} \sin \left\{ \int_a^{a+2\pi} \left[\lambda r_\nu(\xi) + \frac{a_{\nu\nu}^{(0)}(\xi)}{2r_\nu(\xi)} \right] d\xi \right\} \left\{ \frac{r'_\nu(a)}{2r_\nu^2(a)} - \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \left[\sum_{\mu \neq \nu} \frac{a_{\nu\mu}^{(0)}(\xi) a_{\mu\nu}^{(0)}(\xi)}{r_\nu^2(\xi) - r_\mu^2(\xi)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r''_\nu(\xi)}{2r_\nu^3(\xi)} + \frac{3r'_\nu{}^2(\xi)}{4r_\nu^2(\xi)} + a_{\nu\nu}^{(1)}(\xi) - \frac{a_{\nu\nu}^{(0)2}(\xi)}{4r_\nu^2(\xi)} \right] \frac{d\xi}{r_\nu(\xi)} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

dem Betrage nach kleiner eins, verschieden und reell sind.

5. Diskussion der Stabilitätsgleichung.

Aus der Stabilitätsgleichung (5a) bzw. (22) kann man ablesen, wann bei gegebenem Parameter das System (8) nur beschränkte und wann es zum Teil auch unbeschränkte Lösungen besitzt. Wie aus (4) und (7) folgt, liegt genau dann Stabilität vor, wenn die rechten Seiten aller n Gleichungen (22) reell, verschieden und dem Betrage nach kleiner eins sind.

Wir wollen nur den Fall diskutieren, daß die Matrizen $\Re$ und $\mathfrak{A}$ reell sind. Zunächst soll gezeigt werden, daß für hinreichend große λ sicher nie Stabilität vorliegt, wenn auch nur ein Element $r_\mu^2(x)$ der Matrix $\Re$ negativ ist. Dann ergibt sich nämlich aus (22):

$$\cos 2\pi\tau_\mu = \mathfrak{O} \int_a^{a+2\pi} \left[|r_\mu(\xi)| - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)}(\xi)}{2\lambda |r_\mu(\xi)|} \right] d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \mathfrak{O} \int_a^{a+2\pi} |r_\mu(\xi)| d\xi.$$

Für hinreichend große λ ist die rechte Seite sicher größer als eins. Für große λ erhalten wir also höchstens dann nur stabile Lösungen, wenn alle n Funktionen $r_\mu^2(x)$ positiv sind. Daher kann für die weiteren Untersuchungen $\arg r_\mu(x) = 0$ vorausgesetzt werden.

Ehe wir die eigentliche Diskussion beginnen, sei folgende Bemerkung eingeschoben: In (6) haben wir für reelle gerade $\Re$ und $\mathfrak{A}$ und positive $r_\mu^2(x)$ eine algebraische Gleichung n -ten Grades vor uns, die nach (22) abgesehen von mit wachsendem λ klein werdenden Fehlern n verschiedene reelle Lösungen besitzt. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von den Koeffizienten der Gleichung folgt daraus, — da keine reellen mehrfachen Wurzeln auftreten — daß für hinreichend große λ auch die exakten Wurzeln reell und verschieden sind. Es kann also für hinreichend große λ nicht der Fall eintreten, daß $\cos 2\pi\tau_\nu$ einen Realteil dem Betrage nach kleiner eins und einen nichtverschwindenden Imaginärteil hat. Diese Instabilitätsform nennt Herr METTLER „Instabilität zweiter Art“. — Weiter berücksichtige man bei allen weiteren Schlüssen, daß die Bestimmung der Randpunkte von Instabilitätsintervallen immer Fehler von der Größenordnung $1/\lambda^{3/2}$ enthalten kann.

Im weiteren sehen wir λ als veränderlich an. Wir setzen

$$(23) \quad m_\nu = \int_0^{2\pi} r_\nu(\xi) d\xi, \quad n_\nu = \int_0^{2\pi} \frac{a_{\nu\nu}^{(0)}(\xi)}{2r_\nu(\xi)} d\xi, \quad U_\nu = \frac{r_\nu'(a)}{2r_\nu^2(a)} - T_\nu.$$

Dann erhält (22) die Form

$$(22)' \quad \cos 2\pi\tau_\nu = \cos(\lambda m_\nu + n_\nu) \left(1 + \frac{S_\nu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} U_\nu \sin(\lambda m_\nu + n_\nu) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Wir setzen weiter

$$(24) \quad \lambda m_\mu + n_\mu = 2\pi(D_{\mu\gamma} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\gamma} + \xi_{\mu\gamma}).$$

Dabei ist $D_{\mu\gamma}$ eine positive ganze Zahl und $\eta_{\mu\gamma} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$, so daß $-\frac{1}{4} < \xi_{\mu\gamma} \leq +\frac{1}{4}$ bestimmt werden kann. Zu jedem λ lassen sich diese drei Größen dann eindeutig bestimmen. Durchläuft λ ein gewisses Intervall, so ergibt sich eine Anzahl ($\gamma = 1, 2, \dots$) solcher Tripel. $D_{\mu\gamma}$, $\eta_{\mu\gamma}$ sind dann Konstante, während $\xi_{\mu\gamma}$ eine in λ stückweise stetige Funktion ist. Damit erhält (22)' die Gestalt:

$$(22)'' \quad \cos 2\pi\tau_\mu = (-1)^{\eta_{\mu\gamma}} \left[\cos 2\pi\xi_{\mu\gamma} \left(1 + \frac{S_\mu}{\lambda} \right) + \frac{U_\mu}{\lambda} \sin 2\pi\xi_{\mu\gamma} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Wir wollen jetzt die Nullstellen der Funktion

$$Z_\mu(\xi) = 1 - \cos 2\pi\xi_{\mu\gamma} \left(1 + \frac{S_\mu}{\lambda(\xi)} \right) - \frac{U_\mu}{\lambda(\xi)} \sin 2\pi\xi_{\mu\gamma}$$

näherungsweise bestimmen. Diese Nullstellen entsprechen den Grenzpunkten zwischen stabilen und instabilen Intervallen. Für $Z_\mu > 0$ ist $|\cos 2\pi\tau_\mu| < 1$, für $Z_\mu < 0$ ist $|\cos 2\pi\tau_\mu| > 1$.

Zunächst soll der Ausnahmefall $S_\mu = 0$ diskutiert werden:

$$\int_a^{a+2\pi} \left(\frac{a_{\mu\mu}^{(0)} r'_\mu}{r_\mu^3} - \frac{a_{\mu\mu}^{(0)'}}{2r_\mu^2} \right) d\xi = 0.$$

Dieser Fall tritt etwa auf, wenn bei $r_\mu = \text{const.}$ der Mittelwert von $a_{\mu\mu}^{(0)}$ verschwindet oder $r_\mu = |a_{\mu\mu}^{(0)}|$ ist. Dann ist $\xi_{\mu\gamma} = 0$ eine Nullstelle von Z_μ . In diesem Fall ist

$$\left. \frac{dZ_\mu}{d\xi_{\mu\gamma}} \right|_{\xi_{\mu\gamma}=0} = -\frac{2\pi}{\lambda} U_\mu \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^2 Z}{d\xi_{\mu\gamma}^2} \right|_{\xi_{\mu\gamma}=0} = 4\pi^2 \left(1 - \frac{2U_\mu}{\lambda^2 m_\mu} \right).$$

Die zweite Ableitung ist also für hinreichend große λ immer positiv. Für $U_\mu = 0$ ist daher $\xi_{\mu\gamma} = 0$ ein labiler Punkt innerhalb eines Stabilitätsintervalles. Für $U_\mu \neq 0$ ergibt sich ein γ -tes Instabilitätsintervall, dessen einer Eckpunkt $\xi_{\mu\gamma} = 0$ ist. Für $\text{sign } U_\mu = +1$ ist dieser Eckpunkt (im Sinne wachsender λ , also auch wachsender $\xi_{\mu\gamma}$) Anfangspunkt, für $\text{sign } U_\mu = -1$ Endpunkt. Der andere Eckpunkt ergibt sich näherungsweise aus $\frac{Z_\mu}{\sin 2\pi\xi_{\mu\gamma}} = \text{tg } \pi\xi_{\mu\gamma} - \frac{U_\mu}{\lambda} \approx \pi\xi_{\mu\gamma} - \frac{U_\mu}{\lambda} = 0$

zu $\xi_{\mu\gamma} \approx \frac{U_\mu m_\mu}{2\pi^2} - \frac{1}{D_{\mu\gamma} + \frac{\eta_{\mu\gamma}}{2} - \frac{n_\mu}{2\pi}}$. Da $D_{\mu\gamma}$ die Größenordnung von λ hat,

haben die Instabilitätsintervalle die Größenordnung $\frac{1}{\lambda}$. Sie werden also mit wachsendem λ schmaler.

Im weiteren werde $S_\mu \neq 0$ vorausgesetzt. An Stelle der Nullstellen von Z_μ können wir auch die Nullstellen von λZ_μ suchen. Die Intervall-

grenzen sind dann näherungsweise die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2\pi^2(m_\mu S_\mu + 2\pi D_{\mu\gamma} + \pi \eta_{\mu\gamma} - n_\mu) \xi_{\mu\gamma}^2 - 2\pi m_\mu U_\mu \xi_{\mu\gamma} - m_\mu S_\mu = 0:$$

$$\xi_{\mu\gamma} = \frac{m_\mu U_\mu}{2\pi(2\pi D_{\mu\gamma} + \pi \eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)} \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_\mu S_\mu}{2(2\pi D_{\mu\gamma} + \pi \eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)}} \left[1 + \frac{m_\mu U_\mu^2}{4 S_\mu (2\pi D_{\mu\gamma} + \pi \eta_{\mu\gamma} - n_\mu + m_\mu S_\mu)} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Nun ist $Z_\mu(0) = -\frac{S_\mu}{\lambda}$. Ist $\text{sign } S_\mu = -1$, so sind die Wurzeln komplex. Man sieht in diesem Fall auch an $Z_\mu(\xi)$ direkt, daß dann *immer* Stabilität herrscht. Für $\text{sign } S_\mu = +1$ ergeben sich Instabilitätsintervalle von der Größenordnung $\frac{1}{\lambda}$, die den Punkt $\xi_{\mu\gamma} = 0$ enthalten. Wir wollen das Diskussionsergebnis zusammenfassen:

Die einzelne Stabilitätsgleichung (22) gibt immer Anlaß zur Stabilität, wenn das zugehörige $S_\mu < 0$ ist. Ist $S_\mu \geq 0$, so ergeben sich mit wachsendem λ eine Folge von Instabilitätsintervallen, deren Breite für $S_\mu = 0$ mit $\frac{1}{\lambda}$, für $S_\mu > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ abnimmt. Bei $S_\mu = 0$ gibt das Zeichen von U_μ an, ob das Intervall sich von rechts oder von links an $\xi_{\mu\gamma} = 0$ anschließt. Ist auch $U_\mu = 0$, so ergibt sich ein labiler Punkt in einem Stabilitätsbereich. Nachdem wir uns so die Struktur der Instabilitätsbereiche für eine einzelne Gleichung (22) klargemacht haben, folgt für die Stabilität des Differentialgleichungssystem (8):

Bei gegebenem λ ist (8) nur dann stabil, wenn *alle* n zugehörigen $\xi_{\mu\gamma} (\mu = 1 \dots n)$ außerhalb der Instabilitätsintervalle liegen. Labilität liegt vor, wenn bei Betrachtung *aller* n Größen $\xi_{\mu\gamma}$ mindestens eine in einem Eckpunkt eines Instabilitätsintervalles liegt oder die zugehörigen Werte $S_\mu = U_\mu = 0$ sind, die übrigen $\xi_{\mu\gamma}$ aber außerhalb der Instabilitätsintervalle liegen. In jedem anderen Falle ist (8) instabil.

Man kann auch die Abhängigkeit der Lösungen von anderen Parametern α, β untersuchen, wenn man $\mathfrak{A}^{(0)}(x) = \alpha \mathfrak{B}^{(0)}(x)$ oder $\mathfrak{A}^{(1)} = \beta \mathfrak{B}^{(1)}(x)$ setzt. Die Abhängigkeit der Lösungen von α ist sehr ähnlich der Abhängigkeit von λ , während ein variables β nur sehr geringfügig wegen $U_\mu = U_\mu(\beta)$ die Lage der Eckpunkte der Instabilitätsintervalle beeinflusst.

Zum Schluß sei es mir noch gestattet, Herrn Prof. Dr. H. SCHMIDT für wertvolle Hinweise zu danken, durch die er das Entstehen der Arbeit gefördert hat.

Literaturverzeichnis.

BIRKHOFF, G. D. and LANGER, R. E.

- [1] The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order. *Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sc.* **58**, 51—128 (1922/23).

BORG, G.

- [2] Bounded solutions of a system of differential equations. *Ark. Mat. Astron. Fysik B* **34**, Nr. 24 (1948).

CESARI, L.

- [3] Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. *Atti Accad. Italia. Mem.* (6) **11**, 633—695 (1940).

JEFFREYS, H.

- [4] Asymptotic solutions of linear differential equations. *Phil. Mag.* VII. s. **33**, 451—456 (1942).

LANGER, R. E.

- [5] The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain. *Trans. Amer. Math. Soc.* **46**, 151—190 (1939).
[6] The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. *Trans. Amer. Math. Soc.* **67**, 461—490 (1949).

METTLER, E.

- [7] Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. *Ing. Arch.* **17**, 418—449 (1949).

NEWELL, H. E. Jr.

- [8] The asymptotic forms of the solutions of an ordinary linear matrix differential equation in the complex domain. *Duke Math. J.* **9**, 245—258 (1942). **10**, 705—709 (1943).

PERRON, O.

- [9] Über die Abhängigkeit der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen von einem Parameter. *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Heidelberg* (1918/19), I—III.

SCHMEIDLER, W.

- [10] Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendung in Physik und Technik. *Akad. Verlag Berlin* (1949), 158 S.

SEIFERT, H.

- [11] Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen. *Math. Zeitschr.* **48**, 173—192 (1942).

(Eingegangen am 9. Januar 1952.)

Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl.

Von

Claus Müller in Bonn.

Unter dem Titel „Kapazität von Strahlungsfeldern“ untersuchte Herr WEYL kürzlich ¹⁾ das Außenraumproblem der Schwingungsgleichung

$$(1) \quad \Delta U + k^2 U = 0.$$

Die vorliegende Mitteilung liefert einen vereinfachten Beweis des Existenzsatzes ohne Benutzung der Theorie der Elementarteiler höheren Grades für lineare Integralgleichungen.

Wir benutzen die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Arbeit von Herrn WEYL und nehmen an, daß der dreidimensionale EUKLIDISCHE Raum in das „Innere“ V und das „Äußere“ W zerfällt. Ihre gemeinsame Grenze heiße Ω und bestehe aus einer oder mehreren glatten Flächen. Das Gebiet V sei beschränkt und das Gebiet W zusammenhängend.

Gesucht ist eine Funktion U , die in W der Schwingungsgleichung (1) sowie den Ausstrahlungsbedingungen

$$(2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} + i k U \right) = 0$$

gleichmäßig für alle Richtungen genügt und auf Ω vorgegebene Werte annimmt.

Der Ansatz

$$(3) \quad U(p) = \int_{\Omega} \mu(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s') ds'; \quad Q(p, p') = \frac{1}{2\pi r} e^{-ikr}$$

führt auf die Integralgleichung

$$(4) \quad \mu(s) + \int_{\Omega} K(s, s') \mu(s') ds' = \gamma(s); \quad K(s, s') = \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(s, s'),$$

die wir symbolisch in der Form

$$(5) \quad (E + K)\mu = \gamma$$

schreiben. Die Existenz nicht-trivialer Lösungen der homogenen Gleichung erfordert zusätzliche Betrachtungen. Wir bezeichnen mit

¹⁾ H. WEYL: Math. Zeitschr. 55, 187—198 (1952). Herr WEYL unterrichtete mich freundlicherweise vor Erscheinen seiner Arbeit über deren Inhalt.

Φ und H die Gesamtheit der Lösungen der zueinander transponierten Integralgleichungen

$$(6) \quad (E + K)\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \eta(E + K) = 0.$$

Zum Studium der Beziehungen zwischen Φ und H untersuchen wir die Funktionen

$$(7) \quad U_1(p) = \int_{\Omega} \varphi(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s') ds'; \quad U_2(p) = \int_{\Omega} \eta(s') Q(p, s') ds'.$$

Dann besagt (6), daß $U_1(p)$ an der Außenseite von Ω verschwindet. In W ist dann auf Grund des Eindeutigkeitsatzes $U_1(p) = 0$. Es ist somit

$$(I) \quad \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0 \text{ an der Außenseite von } \Omega,$$

während sich aus den Sprungrelationen

$$(II) \quad U_1 = -2\varphi \text{ an der Innenseite von } \Omega$$

ergibt. Für U_2 erhalten wir ebenfalls nach (6)

$$(III) \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = 0 \text{ an der Innenseite von } \Omega$$

und es folgt aus den Sprungrelationen wiederum

$$(IV) \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = -2\eta \text{ an der Außenseite von } \Omega.$$

Aus (III) entnehmen wir mit Hilfe der GREENSchen Formel, daß die Randwerte von U_2 zu Φ gehören, und beweisen nun

Lemma 1. *Durch $M\eta = \int_{\Omega} \eta(s') Q(s, s') ds'$ wird H umkehrbar eindeutig auf Φ abgebildet.*

Da nämlich U_2 beim Durchgang durch Ω stetig ist, würde aus dem Verschwinden der Randwerte von U_2 nach dem Eindeutigkeitsatz folgen, daß U_2 in W identisch verschwindet. Dann ist aber an der Außenseite von Ω $\frac{\partial U_2}{\partial n} = 0$, so daß aus (IV) $\eta = 0$ folgt.

Zu jedem $\varphi \in \Phi$ gibt es daher ein U_2 mit der Eigenschaft (III) so, daß auf Ω $U_2 = \varphi$ ist. Aus der GREENSchen Formel mit $Q(p, p')$ oder $Q(\bar{p}, p')$ einerseits und U_2 andererseits folgt für p auf Ω

Lemma 2. *Es ist $(E + K)\varphi = (E + \bar{K})\varphi$, so daß mit φ auch $\bar{\varphi}$ zu Φ gehört.*

Wir beweisen nun

Lemma 3. *Für $\eta \in H$ ist*

$$\operatorname{Im}(\eta, \bar{M}\bar{\eta}) \geq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\eta = 0$ gilt.

Es sei nämlich K_R das Innere der Kugel vom Radius R um den beliebigen, fest gewählten Punkt O . Mit Σ_R bezeichnen wir die Randfläche dieser Kugel und nehmen an, daß R so groß gewählt wurde,

daß K_R das beschränkte Gebiet V ganz enthält. Dann wird nach der GREENSchen Formel

$$(8) \quad \int_{\Omega} \left(U_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial n} - \bar{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds = \int_{\Sigma_R} \left(U_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial n} - \bar{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds.$$

Wegen (IV) ist die linke Seite gleich

$$(9) \quad 2[(\eta, \bar{M}\bar{\eta}) - (\bar{\eta}, M\eta)] = 4i \operatorname{Im}(\eta, \bar{M}\bar{\eta}),$$

während sich auf Grund der Ausstrahlungsbedingungen für $R \rightarrow \infty$

$$(10) \quad \begin{aligned} o(1) &= \int_{\Sigma_R} \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} + ik U_2 \right) \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial n} - ik \bar{U}_2 \right) ds \\ &= \int_{\Sigma_R} \left(k^2 |U_2|^2 + \left| \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|^2 \right) ds + ik \int_{\Sigma_R} \left(U_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial n} - \bar{U}_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

ergibt. So finden wir mit (8) und (9)

$$(11) \quad 4 \operatorname{Im}(\eta, \bar{M}\bar{\eta}) = \int_{\Sigma_R} \left(k^2 |U_2|^2 + \left| \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|^2 \right) ds + o(1)$$

und erhalten

$$(12) \quad \operatorname{Im}(\eta, \bar{M}\bar{\eta}) \geq 0,$$

wobei aus $\operatorname{Im}(\eta, \bar{M}\bar{\eta}) = 0$ nach einem Satz von RELICH²⁾ $U_2 = 0$ in W und somit nach (IV) $\eta = 0$ folgt.

Ist η_i eine Basis von H , so stellt nach Lemma 1 auch $\varphi_i = M\eta_i$ eine Basis von Φ dar. Die Matrix

$$(13) \quad C_{ik} = (\varphi_i, \eta_k) = (M\eta_i, \eta_k)$$

bezeichnen wir als Kapazitätsmatrix. Setzen wir

$$(14) \quad U_{2,i}(p) = \int_{\Omega} \eta_i(s') Q(p, s') ds',$$

so ist an der Außenseite von Ω

$$(15) \quad U_{2,i}(p) = M\eta_i; \quad \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} = -2\eta_i.$$

Mit den Bezeichnungen von (8) folgt dann aus der GREENSchen Formel

$$(16) \quad \int_{\Omega} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds = \int_{\Sigma_R} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds.$$

Da die Funktionen $U_{2,i}$ auf Grund ihrer Darstellung (14) gleichmäßig für alle Richtungen der Abschätzung

$$(17) \quad U_{2,i} = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

²⁾ F. RELICH, Jahresber. d. D. M. V. 53, 57—65 (1943).

genügen, erhalten wir mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingungen für große R

$$(18) \quad \int_{\Sigma_R} \left(U_{2,i} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,k} - U_{2,k} \frac{\partial}{\partial n} U_{2,i} \right) ds = o(1)$$

und es folgt aus (15) und (16) die Symmetrie der Kapazitätsmatrix (13).

Wir beweisen nun

Lemma 5. *Die Kapazitätsmatrix ist nicht entartet.*

Wäre nämlich $\det |c_{ik}| = 0$, so gäbe es ein nicht triviales $\eta^* \in H$ so, daß für alle $\varphi \in \Phi$

$$(19) \quad (\varphi, \eta^*) = 0$$

ist. Da nach Lemma 1 und Lemma 2 auch $\bar{M}\bar{\eta}^*$ zu Φ gehört, folgte aus (19)

$$(20) \quad \text{Im}(\bar{M}\bar{\eta}^*, \eta^*) = 0.$$

Nach Lemma 3 ist dies aber nur für $\eta^* = 0$ möglich, so daß $\det |c_{ik}| \neq 0$ ist.

Diese Vorbereitungen ermöglichen uns nun den Beweis des Existenzsatzes für das Außenraumproblem.

Satz. *Zu auf Ω beliebig vorgegebenen stetigen Randwerten γ gibt es stets eine Lösung U der Schwingungsgleichung, die den Ausstrahlungsbedingungen genügt und auf Ω die Werte γ annimmt.*

Zum Beweise bestimmen wir zunächst zu γ die eindeutig festgelegte Funktion η^* aus H durch die Bedingung

$$(21) \quad (\eta, \gamma - \eta^*) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in H.$$

Da die Kapazitätsmatrix nicht entartet ist, können wir zu η^* eindeutig ein $\varphi^* \in \Phi$ mit

$$(22) \quad (\eta, \eta^* - \varphi^*) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in H$$

bestimmen. Für dieses φ^* ist dann also auch

$$(23) \quad (\eta, \gamma - \varphi^*) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in H.$$

Die Lösungen μ und η' der Gleichungen

$$(24) \quad (E + K)\mu = \gamma - \varphi^*; \quad (\mu, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \Phi$$

und

$$(25) \quad \varphi^* = M\eta'$$

liefern dann die gesuchte Funktion U in der Form

$$(26) \quad U(p) = \int_{\Omega} \mu(s') \frac{\partial}{\partial n_{s'}} Q(p, s') ds' + \int_{\Omega} \eta'(s') Q(p, s') ds'.$$

Ich möchte Herrn WEYL für eine Anregung zur Verbesserung der Beweisanordnung herzlich danken.

(Eingegangen am 15. Februar 1952.)

On Laplace Transform.

By

S. K. Bose in Lucknow, India.

1. 1. If $\varphi(p)$ and $f(x)$ are related by the integral equation

$$(1) \quad \varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

then $\varphi(p)$ is said to be the *image* of $f(x)$ and $f(x)$ the *original* of $\varphi(p)$, the transform is known as *LAPLACE transform* and symbolically denoted as

$$\varphi(p) \doteq f(x).$$

The object of this paper is to establish some new properties of this transform by using a sequence of LAPLACE transforms. In fact, I have extended the result of GOLDSTEIN ([3], p. 105). The main results are given in the form of theorems. A few particular cases have been derived and they have been illustrated by examples.

2. 1. Theorem I. If

$$\varphi_1(p) \doteq f_1(t),$$

$$\varphi_2(p) \doteq t f_2(t),$$

and

$$\varphi_3(p) \doteq f_3(t)$$

then, provided the integrals converge¹⁾ and the LAPLACE transforms of $|f_1(t)|$, $|f_2(t)|$, $|\varphi_3(t)|$, $|t f_2(t)|$ and $|f_3(t)|$ exist,

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \varphi_1(u) \varphi_2(u) f_3(u) \frac{du}{u} = \int_0^{\infty} f_1(v) F(v) \frac{dv}{v}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^{\infty} f_3(z) (v+z)^{-1} \varphi_2(v+z) dz.$$

Proof. We have

$$(2) \quad \frac{1}{u} \varphi_1(u) = \int_0^{\infty} e^{-uv} f_1(v) dv.$$

¹⁾ By this we would mean absolute convergence throughout this paper.

Multiplying (2) by $\varphi_3(u) f_2(u)$ and integrating with respect to u from zero to infinity, we get

$$(3) \quad \int_0^\infty \varphi_1(u) \varphi_3(u) f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty \varphi_3(u) f_2(u) \left[\int_0^\infty e^{-ur} f_1(r) dr \right] du$$

$$= \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty e^{-uv} f_2(u) \left\{ u \int_0^\infty e^{-uz} f_3(z) dz \right\} du \right] dv$$

$$(4) \quad = \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty f_3(z) \left\{ \int_0^\infty e^{-u(v+z)} u f_2(u) du \right\} dz \right] dv$$

$$= \int_0^\infty f_1(v) \left[\int_0^\infty f_3(z) (v+z)^{-1} \varphi_2(v+z) dz \right] dv$$

$$= \int_0^\infty f_1(r) F(r) \frac{dr}{r}$$

where

$$\frac{1}{v} F(r) = \int_0^\infty f_3(z) (r+z)^{-1} \varphi_2(r+z) dz.$$

The change of order of integration in (3) can be justified by DE LA VALLÉE POUSSIN's theorem ([2], p. 456), if u -integral and v -integral are absolutely convergent and the repeated integral

$$\int_0^\infty \varphi_3(u) f_2(u) \left[\int_0^\infty e^{-uv} f_1(v) dv \right] du$$

is absolutely convergent. Similarly, in (4), if z -integral and u -integral are absolutely convergent and

$$\int_0^\infty f_3(z) (v+z)^{-1} \varphi_2(v+z) dz$$

is absolutely convergent.

2.2. Particular Cases.

Case I. If $f_1 = \varphi_3 = 1$, then the theorem reduces to

$$(1) \quad \int_0^\infty \varphi_1(u) f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v) F(v) \frac{dv}{v}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty \frac{\varphi_2(v+z)}{v+z} dz$$

provided the integrals converge and the LAPLACE transforms of $|f_1(t)|$ and $|f_2(t)|$ exist.

(i) If we take ([4], p. 16)

$$t f_2(t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{q^2}{4t}} \doteq \sqrt{\pi p} e^{-q\sqrt{p}}, \quad \Re(p) > 0,$$

then

$$\frac{1}{v} F(v) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty (v+z)^{-\frac{1}{2}} e^{-q\sqrt{v+z}} dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{q} e^{-q\sqrt{v}}, \quad \Re(q) > 0.$$

We obtain from (1)

$$(2) \quad \int_0^\infty \varphi_1(u) e^{-\frac{q^2}{4u}} u^{-\frac{5}{2}} du = \frac{2\sqrt{\pi}}{q} \int_0^\infty f_1(v) e^{-q\sqrt{v}} dv = \frac{4\sqrt{\pi}}{q^2} \varphi(q),$$

where

$$\varphi(q) \doteq t f_1(t^2)$$

provided $\Re(q) > 0$ and the integrals converge.

(ii) If ([4], p. 16)

$$t f_2(t) = t^{v-1} e^{-qt} \doteq \frac{\Gamma(v)p}{(p+q)^v}, \quad \Re(v) > 0 \text{ and } \Re(p) > 0$$

then

$$\frac{1}{v} F(v) = \Gamma(v) \int_0^\infty (v+z+q)^{-v} dz = \frac{\Gamma(v)}{v-1} (v+q)^{-v+1}, \quad \Re(v) > 1.$$

Hence (1) reduces to

$$(3) \quad \int_0^\infty f_1(v) (v+q)^{-v+1} dv = \frac{(v-1)}{q \Gamma(v)} \psi(q)$$

where

$$\psi(q) \doteq u^{v-3} \varphi_1(u),$$

provided $\Re(v) > 1$, $\Re(q) > 0$ and the integrals in (3) converge.

Case II. If $f_1 = f_3$, then $\varphi_1 = \varphi_3$ and the theorem reduces to

$$(4) \quad \int_0^\infty \{\varphi_1(u)\}^2 f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v) F(v) \frac{dv}{v}$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty f_1(z) (v+z)^{-1} \varphi_2(v+z) dz,$$

provided the integrals converge and the LAPLACE transforms of $|f_2(t) \varphi_1(t)|$, $|f_1(t)|$ and $|t f_2(t)|$ exist.

(i) If ([4], p. 20)

$$f_1(t) = \sin(2\sqrt{qt}) \doteq \sqrt{\frac{q\pi}{p}} e^{-\frac{q}{p}}, \quad \Re(p) > 0,$$

then, from (4) after little simplification, we obtain

$$(5) \quad \int_0^{\infty} v^{-1} \sin(2\sqrt{q}v) F(v) dv = \frac{q\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-qt} f_2\left(\frac{2}{t}\right) dt = \frac{\pi}{2} \psi_1(q),$$

where

$$\psi_1(q) \doteq f_2\left(\frac{2}{t}\right)$$

and

$$\frac{1}{v} F(v) = \int_0^{\infty} \sin(2\sqrt{qz})(v+z)^{-1} \varphi_2(v+z) dz,$$

provided the integrals converge.

2.3. Examples.

(1) If ([4], p. 14)

$$f_1(t) = \frac{1}{1+t}$$

then

$$f_1(t) \doteq p^{\frac{1}{2}} e^{\frac{p}{2}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(p), \quad \Re(p) > 0.$$

Also ([4], p. 14)

$$t f_1(t^2) = \frac{t}{1+t^2} \doteq -p [\cos p \operatorname{ci}(p) + \sin p \operatorname{si}(p)], \quad \Re(p) > 0.$$

Hence from § 2.2 (2), we get

$$(1) \quad \int_0^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{u}{2} - \frac{q^2}{4u}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(u) du = -\frac{4\sqrt{\pi}}{q} [\cos q \operatorname{ci}(q) + \sin q \operatorname{si}(q)],$$

$$\Re(q) > 0.$$

(2) If

$$f_1(t) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

then from § 2.2 (2), we get

$$(2) \quad \int_0^{\infty} u^{-\frac{9}{2}} e^{\frac{u}{2} - \frac{q^2}{4u}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(u) du = \frac{4\sqrt{\pi}}{q^2} \left[\frac{\pi q}{2} \{H_1(q) - Y_1(q)\} - 1 \right],$$

$$\Re(q) > 0.$$

(3) If

$$f_1(t) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{2}} M_{\mu, -\frac{1}{4}}(t),$$

then from 2.2 (3), we get

$$(3) \quad \int_0^{\infty} v^{-\frac{3}{4}} (v+q)^{\mu - \frac{9}{4}} e^{-\frac{v}{2}} M_{\mu, -\frac{1}{4}}(v) dv$$

$$= \frac{(4-\mu)\sqrt{\pi}}{q\Gamma(\frac{1}{4}-\mu)} [1 - (q+\mu-\frac{3}{4}) S(\mu+\frac{1}{4}, q)], \quad \Re(4\mu) < 9 \text{ and } \Re(q) > 0,$$

where $S(\nu, z)$ is SCHLÖMILCH's function.

4. If ([4], p. 51)²⁾

$$f_1(t) = t^\alpha e^{-\frac{1}{2}t} W_{\mu, \nu}(t)$$

then

$$f_1(t) \doteq \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2} + \alpha + \nu)p}{\Gamma(\alpha - \mu + 2)} {}_2F_1\left[\frac{3}{2} + \alpha \pm \nu; \alpha - \mu + 2; p\right],$$

$$\Re(\alpha \pm \nu + \frac{3}{2}) > 0 \text{ and } \Re(p) > 0.$$

Also ([1], p. 161)

$$u^{\alpha-\mu} \mathfrak{G}_1(u) = \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2} + \alpha \pm \nu)}{\Gamma(\alpha - \mu + 2)} u^{\alpha-\mu+1} {}_2F_1\left[\frac{3}{2} + \alpha \pm \nu; \alpha - \mu + 2; -u\right]$$

$$\doteq q^{\mu-\alpha-1} E\left[\frac{3}{2} + \alpha + \nu, \frac{3}{2} + \alpha - \nu :: q\right], \quad \Re(\frac{3}{2} + \alpha) > 0 \text{ and } \Re(q) > 0$$

where $E[\alpha, \beta :: z]$ is MACROBERT'S function.

Then from § 2.2 (3), we get

$$\begin{aligned} (4) \quad & \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}} v^\alpha (v+q)^{\mu-\alpha-2} W_{\mu, \nu}(v) dv \\ &= \frac{(\alpha - \mu + 2)}{\Gamma(\alpha - \mu + 3)} q^{\mu-\alpha-2} E\left[\frac{3}{2} + \alpha + \nu, \frac{3}{2} + \alpha - \nu :: q\right], \end{aligned}$$

$$\Re(\alpha + \frac{3}{2}) > 0, \quad \Re(\alpha \pm \nu + \frac{3}{2}) > 0, \quad \Re(\alpha - \mu + 2) > 0 \text{ and } \Re(q) > 0.$$

5. If

$$t f_2(t) = t^\alpha e^{-\frac{1}{2}t} W_{\alpha-1, \nu}(t),$$

then from § 2.2 (5), we obtain

$$(5) \quad \int_0^\infty v^{-1} \sin(2\sqrt{qv}) F(v) dv = \frac{\pi 2^{\alpha-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{2\alpha-1}{2}}} K_{2\nu}(2\sqrt{2q})$$

where

$$\frac{1}{v} F(v) = \frac{\Gamma_*(\frac{3}{2} + \alpha \pm \nu)}{2} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{qz}) {}_2F_1\left[\frac{3}{2} + \alpha \pm \nu; 3; -(v+z)\right] dz,$$

$$\Re(\alpha \pm \nu + \frac{3}{2}) > 0 \text{ and } \Re(q) > 0,$$

and $K_\nu(z)$ is the BESSEL function.

3.1. Theorem II. If

$$\varphi(p) \doteq f(t),$$

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) \doteq g(t),$$

and

$$\psi(p) \doteq \chi(t),$$

²⁾ The symbol

and

$$\Gamma_*(\alpha \pm \beta) \text{ denotes } \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha - \beta)$$

$${}_2F_1[\alpha \pm \beta; \nu; z] \text{ denotes } {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta, & \alpha - \beta \\ \nu \end{matrix}; z\right\}.$$

then, provided the integrals converge,

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \varphi(t^2) \chi(t) \frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} g\left(\frac{t^2}{4}\right) \psi(t) dt.$$

Proof. We have ([4], p. 13), if

$$\varphi(p) \doteq f(t)$$

and

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) \doteq g(t),$$

then

$$(2) \quad \varphi(p^2) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2} t g\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

Also ([3], p. 105), if

$$\varphi_1(p) \doteq f_1(x)$$

and

$$\varphi_2(p) \doteq f_2(x),$$

then

$$(A) \quad \int_0^{\infty} \varphi_1(u) f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^{\infty} \varphi_2(v) f_1(v) \frac{dv}{v}.$$

Now, if

$$\varphi_1(p) = \psi(p), \quad \varphi_2(p) = \varphi(p^2), \quad f_1(x) = \chi(x), \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x g\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

then from (A), we have

$$\int_0^{\infty} \varphi(t^2) \chi(t) \frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} g\left(\frac{t^2}{4}\right) \psi(t) dt.$$

3.2. Particular Cases.

Case I. If

$$g(t) = K_{\pm \frac{1}{2}}(t),$$

where $K_\nu(z)$ is the BESSEL function, then ([4], p. 39)

$$\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi p}{\sqrt{2} \sqrt{p+1}}, \quad \Re(p) > 0,$$

therefore ([4], p. 14)

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sqrt{x+1}} \doteq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{(\pi p) e^p \operatorname{erfc} \sqrt{p}},$$

where

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hence, from theorem II, we get

$$(1) \quad \sqrt{2\pi} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(t^2) \chi(t) dt = \int_0^\infty K_{\pm \frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{4}\right) \psi(t) dt,$$

provided the integrals converge.

Case II. If ([4], p. 28)

$$g(t) = t^2 J_\nu(2 \sqrt{at}),$$

then

$$g(t) = a^{\frac{\nu}{2}} p^{-\nu} e^{-\frac{a}{p}} = \sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right), \quad \Re(\nu+1) > 0,$$

therefore ([4], p. 16)

$$f(t) = a^{\frac{\nu}{2}} t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-at} = a^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu+\frac{3}{2}) p = \varphi(p), \quad \Re(\nu+\frac{3}{2}) > 0 \text{ and } \Re(p) > 0.$$

Hence, from § 3.1 (1), we get

$$(2) \quad \sqrt{\pi} \int_0^\infty t^\nu J_\nu(\sqrt{at}) \psi(t) dt = 2^{\nu+1} \Gamma(\nu+\frac{3}{2}) a^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty t(t^2+a)^{-\nu-\frac{3}{2}} \chi(t) dt$$

provided $\Re(\nu+1) > 0$ and the integrals converge.

3.3. Example. If ([4], p. 17)

$$\chi(t) = e^{-qt^2} (\sqrt{q}t)^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)p}{2^2 \sqrt{q}} e^{\frac{p^2}{8q}} D_{-\lambda}\left(\frac{p}{\sqrt{2q}}\right), \quad \Re(p) > 0 \text{ and } \Re(\lambda) > 0,$$

then, from § 3.2 (2), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2\nu+2) \sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} \sqrt{q}} \int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(\sqrt{at}) e^{\frac{t^2}{8q}} D_{-(2\nu+2)}\left(\frac{t}{\sqrt{2q}}\right) dt \\ &= q^{\nu+\frac{1}{2}} 2^{\nu+1} \Gamma(\nu+\frac{3}{2}) a^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty t^{2\nu+2} (t^2+a)^{-\nu-\frac{3}{2}} e^{-qt^2} dt. \end{aligned}$$

Now, on using the operational relation ([4], p. 15], we obtain

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(\sqrt{at}) e^{\frac{t^2}{8q}} D_{-(2\nu+2)}\left(\frac{t}{\sqrt{2q}}\right) dt \\ &= a^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} 2^{\nu+\frac{3}{2}} (\nu+1) q^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{aq}{2}} D_{-(2\nu+3)}(\sqrt{2qa}) \\ & \quad \Re(\nu) > -1 \text{ and } \Re(q) > 0. \end{aligned}$$

4.1. Theorem III. I/

$$\varphi(p) \doteq f(t),$$

$$p^\nu e^{-xp^\mu} \doteq g(x, t)$$

and

$$\Theta(p) \doteq F(t),$$

then, provided the integrals converge and $\int_0^\infty g(x, v) f(x) dx$ is convergent,

$$(1) \quad \int_0^\infty u^{\nu-\mu-1} \varphi(u^\mu) F(u) du = \int_0^\infty f(x) G(x) dx$$

where

$$G(x) = \int_0^\infty \Theta(v) g(x, v) \frac{dv}{v}.$$

Proof. We have ([4], p. 13), if

$$\varphi(p) \doteq f(t)$$

and

$$p^\nu e^{-xp^\mu} \doteq g(x, t),$$

then

$$p^{\nu-\mu} \varphi(p^\mu) \doteq \int_0^\infty g(x, t) f(x) dx.$$

Now, applying (A), with

$$\varphi_1(p) = p^{\nu-\mu} \varphi(p^\mu), f_1(t) = \int_0^\infty g(x, t) f(x) dx,$$

$\varphi_2(p) = \Theta(p)$ and $f_2(t) = F(t)$, we obtain

$$(2) \quad \int_0^\infty F(u) u^{\nu-\mu-1} \varphi(u^\mu) du = \int_0^\infty \Theta(v) \left[\int_0^\infty g(x, v) f(x) dx \right] \frac{dv}{v} \\ = \int_0^\infty f(x) G(x) dx$$

where

$$G(x) = \int_0^\infty \Theta(v) g(x, v) \frac{dv}{v}.$$

The change of order of integration in (2) can be justified by DE LA VALLÉE POUSSIN'S theorem, if x -integral and v -integral are absolutely convergent and the integral

$$\int_0^\infty f(x) G(x) dx$$

is absolutely convergent.

4.2. Particular Case. If

$$g(x, t) = (2t)^{-\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right),$$

then ([4], p. 52)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \doteq p^\nu e^{-x|p}.$$

Hence § 4.1 (1) reduces to

$$(1) \quad \int_0^\infty u^{\nu-\frac{3}{2}} F(u) \varphi(\sqrt{u}) du = \int_0^\infty f(x) G(x) dx,$$

where

$$G(x) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Theta(v) (2v)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8v}} D_{2\nu-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2v}} \right) dv$$

provided the integrals converge and also the integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) f(x) dx$$

is convergent.

Further, if ([4], p. 48)

$$f(x) = J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}}) \doteq \frac{e^{-\frac{2}{p^2}}}{p} I_n \left(\frac{2}{p^2} \right), \quad \Re(p) > 0,$$

then § 4.2 (1) reduces to

$$(2) \quad \int_0^\infty F(u) u^{\nu-2} e^{-\frac{2}{u}} I_n \left(\frac{2}{u} \right) du = \int_0^\infty J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}}) G(x) dx,$$

where

$$G(x) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Theta(v) (2v)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8v}} D_{2\nu-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2v}} \right) dv,$$

provided the integrals converge.

4.3. Example. If ([4], p. 16)

$$F(t) = t^{-\nu} e^{-\frac{q}{t}},$$

then

$$F(t) \doteq 2q^{\frac{1-\nu}{2}} p^{\frac{\nu+1}{2}} K_{\nu-1}(2\sqrt{pq}), \quad \Re(p) > 0$$

where $K_{\nu-1}(z)$ is the BESSEL function.

Then, from § 4.2 (2), after little simplification, we obtain

$$(5) \quad \int_0^{\infty} J_{2n,n}(3x^{\frac{2}{3}}) G(x) dx = \frac{2^n q}{\{q(q+4)\}^{\frac{1}{2}} [q+2+\{q(q+4)\}^{\frac{1}{2}}]^n}$$

where

$$G(x) = \frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} q^{\frac{1-\nu}{2}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{8t}} K_{\nu-1}(2\sqrt{qt}) D_{2\nu-1}\left(\sqrt{\frac{x}{2t}}\right) dt,$$

$$\Re(n) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\nu) > 1 \text{ and } \Re(q) > 0.$$

References.

- [1] BOSE, N. N.,
Math. Zeitschr. **54** (1951), p. 160—167.
- [2] BROMWICH, T. J. I'A.,
The Theory of Infinite Series (1908).
- [3] GOLDSTEIN, S.,
Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1932), p. 103—125.
- [4] McLACHLAN, N. W. and HUMBERT, P.,
Formulaire pour le Calcul symbolique (1941).

(Eingegangen am 1. Januar 1952.)

A Formalisation of Post's m -valued Propositional Calculus.

By

Alan Rose in Aberdeen (Scotland).

It has recently been shown¹⁾ that the m -valued logics of SŁUPECKI²⁾ with s ($1 \leq s \leq m-1$) designated truth-values can be formalised by means of eighteen axioms, whatever the value of m . The object of the present paper is to show that if we take the primitive functions of POST³⁾ instead of those of SŁUPECKI we can, in the case $s = 1$, formalise the system by means of ten axioms.

We denote the truth-values by $1, 2, \dots, m$; 1 being the designated truth-value. The truth-values of the primitive functions, alternation and negation, are determined as follows. If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \sim \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ have the truth-values $x, y, f(x), g(x, y)$ respectively then

$$f(x) = x + 1 \quad (x \neq m)$$

$$f(m) = 1$$

$$g(x, y) = \min. (x, y).$$

Post showed⁴⁾ that the system with these primitives is functionally complete. Thus we can define in terms of the primitives a second negation function such that if the truth-values of $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}}$ are $x, h(x)$ respectively then

$$h(1) = m$$

$$h(x) = 1 \quad (x \neq 1),$$

and a conjunction function such that if the truth-values of $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ are $x, y, j(x, y)$ respectively then

$$j(x, y) = \max. (x, y).$$

¹⁾ A. ROSE, Eight-valued Geometry, Proc. Lond. Math. Soc., Third Series 2 (1952), pp. 30—44.

²⁾ J. SŁUPECKI, Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań, Comptes rendus (Warsaw) Classe III 32 (1939), pp. 110—128.

³⁾ E. L. POST, Introduction to a general theory of elementary propositions, American J. of Math. 43 (1921), pp. 163—185.

⁴⁾ Loc. cit.

We can then define a second conjunction function by

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}.$$

Thus $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ has the truth-value 1 when $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ both have the truth-value 1, otherwise $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ has the truth-value m . We define implication and equivalence by

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$$

and

$$\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B} =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}).$$

Thus if the truth-values of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ are x , y , $k(x, y)$, $l(x, y)$ respectively

$$\begin{aligned} k(1, y) &= y \\ k(x, y) &= 1 \quad (x \neq 1) \\ l(1, 1) &= 1 \\ l(1, x) &= l(x, 1) = m \quad (x \neq 1) \\ l(x, y) &= 1 \quad (x \neq 1, y \neq 1). \end{aligned}$$

We define the J_m function of ROSSER and TURQUETTE⁵⁾ by

$$J_m(\mathfrak{A}) =_{\text{df.}} \sim^{m-1}(\mathfrak{A} \vee \sum_{i=2}^{m-1} \sim^i \mathfrak{A}),$$

where $\sum$ relates to summation by $\vee$. Thus $J_m(\mathfrak{A})$ has the truth-value 1 when $\mathfrak{A}$ has the truth-value m , otherwise $J_m(\mathfrak{A})$ has the truth-value m . We then define a second equivalence function by

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \prod_{i=0}^{m-1} (\sim^i \mathfrak{A} \longleftrightarrow \sim^i \mathfrak{B}),$$

where $\prod$ relates to summation by $\cdot$. Thus $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ has the truth-value 1 when the truth-values of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are the same, otherwise $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ has the truth-value m .

The proof of completeness of our formalisation will depend on a generalisation of HILBERT'S method⁶⁾ of reducing formulae to normal form.

We consider the axioms

$$(A\ 1) \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sim^i X$$

$$(A\ 2) \quad ((X \rightarrow Y) \rightarrow Z \vee (U \vee V)) \rightarrow ((U \rightarrow X) \rightarrow Z \vee (V \vee X))$$

$$(A\ 3) \quad (X \equiv Y) \rightarrow (Z \vee X \equiv Y \vee Z)$$

⁵⁾ J. B. ROSSER and A. R. TURQUETTE, Axiom schemes for m -valued Propositional Calculi, *Journal Symbolic Logic* 10 (1945), pp. 61–82.

⁶⁾ D. HILBERT and W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Second Edition, Springer, Berlin (1938), pp. 14–18; *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea, N. Y. (1950), pp. 17–18.

- (A 4) $X \& Y \longleftrightarrow X \cdot Y$
 (A 5) $J_m(X \& Y) \equiv J_m(X) \vee J_m(Y)$
 (A 6) $J_m(X \vee Y) \equiv J_m(X) \& J_m(Y)$
 (A 7) $J_m(X) \longleftrightarrow \sim X$
 (A 8) $X \longleftrightarrow \sim^m X$
 (A 9) $\sim(X \vee Y) \equiv (\sim X \vee \sim Y) \& (\sim X \vee Y) \& (X \vee \sim Y)$
 (A 10) $\sim(X \& Y) \equiv (\sim X \vee J_m(Y)) \& (J_m(X) \vee \sim Y)$

together with a substitution rule (Rule (α)) and

Rule (β) *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ then $\mathfrak{B}$.*

It has been shown by MEREDITH⁷⁾ that if we regard (A 2) as a formula of the 2-valued Propositional Calculus with $\vee$ and $\sim$ as primitives we can deduce from it all identical formulae of the 2-valued Propositional Calculus. Thus we can deduce

- (F 1) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((Z \rightarrow U) \rightarrow (X \cdot Z \rightarrow Y \cdot U))$
 (F 2) $X \cdot Y \rightarrow X$
 (F 3) $X \cdot (Y \cdot Z) \longleftrightarrow (X \cdot Y) \cdot Z, (X \cdot Y) \cdot Z \longleftrightarrow X \cdot (Y \cdot Z)$
 (F 4) $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((Y \longleftrightarrow Z) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Z))$
 (F 5) $(Z \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((X \longleftrightarrow Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Z))$
 (F 6) $(Y \longleftrightarrow X) \rightarrow (Z \cdot X \longleftrightarrow Z \cdot Y)$
 (F 7) $X \longleftrightarrow X$
 (F 8) $X \rightarrow (Y \rightarrow (X \cdot Y))$
 (F 9) $X \rightarrow (Y \rightarrow (Y \cdot X))$
 (F 10) $(X \longleftrightarrow Y) \cdot (Y \longleftrightarrow Z) \rightarrow (X \longleftrightarrow Z)$
 (F 11) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))$
 (F 12) $X \vee (Y \cdot Z) \longleftrightarrow (X \vee Y) \cdot (X \vee Z)$
 (F 13) $(X \cdot Y) \vee Z \longleftrightarrow (X \vee Z) \cdot (Y \vee Z)$
 (F 14) $X \cdot (Y \vee Z) \longleftrightarrow (X \cdot Y) \vee (X \cdot Z)$
 (F 15) $(X \vee Y) \cdot Z \longleftrightarrow (X \cdot Z) \vee (Y \cdot Z)$
 (F 16) $X \vee Y \longleftrightarrow Y \vee X$
 (F 17) $X \rightarrow X \vee Y.$

From (F 2) and the definition of $\equiv$ we deduce

- (F 18) $(X \equiv Y) \rightarrow (X \longleftrightarrow Y).$

Applying Rule (α) to (F 4) we deduce

- (F 19) $(X \longleftrightarrow \sim^m X) \rightarrow ((\sim^m X \longleftrightarrow \sim^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow \sim^m Y)).$

⁷⁾ This result has not yet been published.

Applying Rule (β) to (A 8) and (F 19) we deduce

$$(F\ 20) \quad (\sim {}^m X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow \sim {}^m Y).$$

Applying Rule (α) to (F 5) we deduce

$$(F\ 21) \quad (Y \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \rightarrow ((X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y)).$$

Applying Rule (α) to (A 8) we deduce

$$(F\ 22) \quad Y \longleftrightarrow \sim {}^m Y.$$

Applying Rule (β) to (F 21) and (F 22) we deduce

$$(F\ 23) \quad (X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y).$$

We now prove

Rule 1. *If $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$ then $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$.*

From (A 2) we deduce $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((Y \longleftrightarrow Z) \rightarrow (X \longleftrightarrow Z))$. Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ for X, Y, Z respectively and applying Rule (β) twice we deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$.

Rule 2. *If $\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$ is demonstrable and Φ is definable in terms of $\vee$ and $\neg$ then $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ is demonstrable.*

We prove this by strong induction on the number n of occurrences of $\vee$ and $\neg$ in Φ . If $n=1$ we apply Rule (α) to the formulae $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (\overline{X} \longleftrightarrow \overline{Y})$, $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \longleftrightarrow Z \vee Y)$, $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (X \vee Z \longleftrightarrow Y \vee Z)$ which can be deduced from (A 2). Thus we deduce $(\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C})$.

Applying Rule (β) we deduce $\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$. Similarly we can deduce $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C} \longleftrightarrow \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$. We now assume the result for $1, 2, \dots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ is of the form

$\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ where neither Ψ nor χ contains more than n occurrences of $\vee$ and $\neg$. From (A 2) we deduce

$$(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow ((Z \longleftrightarrow U) \rightarrow (\overline{X \vee Z} \longleftrightarrow \overline{Y \vee U})).$$

By our induction hypothesis we can prove $\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ and $\chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$. Thus, applying Rule (α) to the previous formula and then applying Rule (β) twice we deduce

$$\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \vee \chi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \text{ i. e. } \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longleftrightarrow \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}).$$

Thus the rule is proved. Since $(X \longleftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ can be deduced from (A 2) it follows that if, in addition, $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ is demonstrable then $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ is demonstrable.

Applying Rule 1 to (F 20) and (F 23) we deduce

$$(F\ 24) \quad (\sim {}^m X \longleftrightarrow \sim {}^m Y) \longleftrightarrow (X \longleftrightarrow Y).$$

From (A 2) we deduce

$$(F\ 25) \quad X \cdot Y \longleftrightarrow Y \cdot X.$$

From (F 3), (F 25) and Rules 1 and 2 we deduce

$$(F\ 26) \quad (X \equiv Y) \leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iY) \cdot (X \leftrightarrow Y) \right).$$

Applying Rule (α) to (F 6) we deduce

$$(F\ 27) \quad ((\sim {}^mX \leftrightarrow \sim {}^mY) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)) \rightarrow \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iY) \cdot (X \leftrightarrow Y) \right) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y) \right).$$

Applying Rule (β) to (F 24) and (F 27) we deduce

$$(F\ 28) \quad \left(\prod_{i=1}^{m-1} (\sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iY) \cdot (X \leftrightarrow Y) \right) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y).$$

Applying Rule 1 to (F 26) and (F 28) we deduce

$$(F\ 29) \quad (X \equiv Y) \leftrightarrow (\sim X \equiv \sim Y).$$

Applying Rule (α) to (F 7) we deduce

$$(F\ 30) \quad \sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iX. \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ for X, Y respectively in (F 8) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 3. *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ then $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$.*

Applying Rule 3 to (F 7) and (F 30) we deduce

$$(F\ 31) \quad X \equiv X.$$

Applying Rule (α) to (A 3) we deduce

$$(F\ 32) \quad (X \equiv X) \rightarrow (Z \vee X \equiv X \vee Z).$$

Applying Rule (β) to (F 31) and (F 32) we deduce

$$(F\ 33) \quad Z \vee X \equiv X \vee Z.$$

Applying Rule (α) to (F 10) we deduce

$$(F\ 34) \quad (\sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iY) \cdot (\sim {}^iY \leftrightarrow \sim {}^iZ) \rightarrow (\sim {}^iX \leftrightarrow \sim {}^iZ) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ for X, Y, Z, U in (F 1) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 4. *If $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ then $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}$.*

Applying Rule 4 to (F 10), (F 25) and (F 34) and then using (F 3) and (F 11) we deduce

$$(F\ 35) \quad (X \equiv Y) \cdot (Y \equiv Z) \rightarrow (X \equiv Z).$$

Applying Rule (α) to (F 33) we deduce

$$(F\ 36) \quad Y \vee Z \equiv Z \vee Y.$$

Applying Rule (α) to (F 9) we deduce

$$(F\ 37) \quad (Y \vee Z \equiv Z \vee Y) \rightarrow ((Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot (Y \vee Z \equiv Z \vee Y)).$$

Applying Rule (β) to (F 36) and (F 37) we deduce

$$(F\ 38) \quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot (Y \vee Z \equiv Z \vee Y).$$

Applying Rule (α) to (F 35) we deduce

$$(F\ 39) \quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \cdot (Y \vee Z \equiv Z \vee Y) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$$

Substituting $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ for X, Y, Z respectively in (F 11) and applying Rule (β) twice we deduce

Rule 5. *If $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ then $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$.*

Applying Rule 5 to (F 38) and (F 39) we deduce

$$(F\ 40) \quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$$

Applying Rule 5 to (A 3) and (F 40) we deduce

$$(F\ 41) \quad (X \equiv Y) \rightarrow (Z \vee X \equiv Z \vee Y).$$

Applying Rule (α) to (F 8) we deduce

$$(F\ 42) \quad (X \vee Z \equiv Z \vee X) \rightarrow ((Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot \\ \times (Z \vee X \equiv Y \vee Z)).$$

Applying Rule (α) to (F 33) we deduce

$$(F\ 43) \quad X \vee Z \equiv Z \vee X.$$

Applying Rule (β) to (F 42) and (F 43) we deduce

$$(F\ 44) \quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot (Z \vee X \equiv Y \vee Z).$$

Applying Rule (α) to (F 35) we deduce

$$(F\ 45) \quad (X \vee Z \equiv Z \vee X) \cdot (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$$

Applying Rule 5 to (F 44) and (F 45) we deduce

$$(F\ 46) \quad (Z \vee X \equiv Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$$

Applying Rule 5 to (A 3) and (F 46) we deduce

$$(F\ 47) \quad (X \equiv Y) \rightarrow (X \vee Z \equiv Y \vee Z).$$

We now prove

Rule 6. *If $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ is demonstrable and $\mathfrak{B}$ is part of $\mathfrak{A}$ and the result of replacing $\mathfrak{B}$ by $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$ is $\mathfrak{D}$, then $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$ is demonstrable.*

Let the numbers of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ be $x+n, x$ respectively. We shall prove the rule by strong induction on n . If $n=0$ $\mathfrak{A}$ is of the form $\sim^i \mathfrak{B}$. From (F 29) we deduce, using (A 2), $(X \equiv Y) \rightarrow (\sim^i X \equiv \sim^i Y)$.

Applying Rule (α) we deduce

$$(\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}) \rightarrow (\sim^i \mathfrak{B} \equiv \sim^i \mathfrak{C}).$$

Applying Rule (β) to this formula and $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ we deduce

$$\sim^i \mathfrak{B} \equiv \sim^i \mathfrak{C}, \text{ i. e. } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}.$$

We now assume the Rule for $0, 1, 2, \dots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}$ will be of the forms

$$\sim^i(\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}), \sim^i(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$$

respectively or of the forms

$$\sim^i(\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E}), \sim^i(\mathfrak{G} \vee \mathfrak{F})$$

respectively where, in each case, $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}$ is demonstrable. Let us consider the first case. Applying Rule (α) to (F 47) we deduce

$$(\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}).$$

Applying Rule (β) to this formula and $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}$ we deduce

$$\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}.$$

As above we then deduce

$$\sim^i(\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}) \equiv \sim^i(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}),$$

i. e. $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$. In the second case we proceed as above except that we use (F 41) instead of (F 47). Thus the rule is proved.

We now make two definitions.

Definition 1. (i) A propositional variable is an A-formula.

(ii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula $\sim\mathfrak{A}$ is an A-formula.

(iii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula $J_m(\mathfrak{A})$ is an A-formula.

(iv) A formula cannot be an A-formula except in virtue of (i), (ii), (iii).

Definition 2. (i) An A-formula is a B-formula.

(ii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are B-formulae $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ is a B-formula.

(iii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are B-formulae $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ is a B-formula.

(iv) A formula cannot be a B-formula except in virtue of (i), (ii), (iii).

We now prove

Rule 7. *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ and $\mathfrak{B}$ is a part of $\mathfrak{A}$ and the result of replacing $\mathfrak{B}$ by $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{A}$ is $\mathfrak{D}$ then $\mathfrak{D}$.*

From Rule 6 we deduce $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$. Using (F 18) we then deduce $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{D}$. From (A 2) we deduce $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \supset Y)$. Using this we deduce $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}$. Using Rule (β) we then deduce $\mathfrak{D}$.

We now prove

Theorem 1. *To every formula $\mathfrak{A}$ there corresponds a B-formula $\mathfrak{A}^*$ such that $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^*$ is demonstrable.*

Lemma 1. *If $\mathfrak{A}$ is a B-formula then there exist B-formulae $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ such that $\sim\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $J_m(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{C}$ are demonstrable.*

Let the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathfrak{A}$ be n . We shall prove the lemma by strong induction on n . If $n = 1$ we apply Rule (α) to (F 31). We now assume the lemma for $1, 2, \dots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$ is of one of

the forms $\mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \& \mathcal{E}$ where $\mathcal{D}$ and $\mathcal{E}$ are B-formulae and neither $\mathcal{D}$ nor $\mathcal{E}$ contains more than n propositional variables. Applying Rule (α) to (A 5), (A 6), (A 9) and (A 10) we deduce

$$\begin{aligned}\sim(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) &\equiv (\sim \mathcal{D} \vee \sim \mathcal{E}) \& (\sim \mathcal{D} \vee \mathcal{E}) \& (\mathcal{D} \vee \sim \mathcal{E}) \\ \sim(\mathcal{D} \& \mathcal{E}) &\equiv (\sim \mathcal{D} \vee J_m(\mathcal{E})) \& (J_m(\mathcal{D}) \vee \sim \mathcal{E}) \\ J_m(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) &\equiv J_m(\mathcal{D}) \& J_m(\mathcal{E}) \\ J_m(\mathcal{D} \& \mathcal{E}) &\equiv J_m(\mathcal{D}) \vee J_m(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

By our induction hypothesis there exist B-formulae $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ such that $\sim \mathcal{D} = \mathcal{F}$, $J_m(\mathcal{D}) = \mathcal{G}$, $\sim \mathcal{E} = \mathcal{H}$, $J_m(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$ are demonstrable. Applying Rule 7 we deduce

$$\begin{aligned}\sim(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) &\equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \& (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \& (\mathcal{D} \vee \mathcal{H}) \\ \sim(\mathcal{D} \& \mathcal{E}) &\equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{R}) \& (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \\ J_m(\mathcal{D} \vee \mathcal{E}) &\equiv \mathcal{G} \& \mathcal{R} \\ J_m(\mathcal{D} \& \mathcal{E}) &\equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Since $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ are B-formulae $(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \& (\mathcal{F} \vee \mathcal{E}) \& (\mathcal{D} \vee \mathcal{H})$, $(\mathcal{F} \vee \mathcal{R}) \& (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$, $\mathcal{G} \& \mathcal{R}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{R}$ are B-formulae. Thus the lemma is proved.

Lemma 2. *If $\Phi(X)$ is an A-formula and $\mathcal{A}$ is a B-formula then there exists a B-formula $\mathcal{B}$ such that $\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ is demonstrable.*

We prove the lemma by induction on the number n of occurrences of $\sim$ and J_m in Φ . If $n = 1$ the lemma follows from Lemma 1. We now assume the lemma for n and prove it for $n + 1$. Then $\Phi(\mathcal{A})$ is of one of the forms $\sim \Psi(\mathcal{A})$, $J_m(\Psi(\mathcal{A}))$ where Ψ contains n occurrences of $\sim$ and J_m . By our induction hypothesis there exists a B-formula $\mathcal{C}$ such that $\Psi(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{C}$ is demonstrable. Applying Rule 6 we deduce

$$\begin{aligned}\sim \Psi(\mathcal{A}) &\equiv \sim \mathcal{C} \\ J_m(\Psi(\mathcal{A})) &\equiv J_m(\mathcal{C}).\end{aligned}$$

Since $\mathcal{C}$ is a B-formula it follows from Lemma 1 that there exist B-formulae $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ such that

$$\begin{aligned}\sim \mathcal{C} &\equiv \mathcal{D} \\ J_m(\mathcal{C}) &\equiv \mathcal{E}\end{aligned}$$

are demonstrable. Using Rule 3 and (F 35) we deduce

$$\begin{aligned}\sim \Psi(\mathcal{A}) &\equiv \mathcal{D} \\ J_m(\Psi(\mathcal{A})) &\equiv \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Thus the lemma is proved.

Proof of the main theorem. Let the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\mathcal{A}$ be n . We shall prove the theorem by strong induction on n . If $n = 1$ we apply Rule (α)

to (F 31). We now assume the theorem for $1, 2, \dots, n$ and prove it for $n+1$. Then $\mathfrak{A}$ is of the form $\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$, where $\Phi(X)$ is an A-formula and neither $\mathfrak{B}$ nor $\mathfrak{C}$ contains more than n propositional variables. By our induction hypothesis there exist B-formulae $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ such that $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}, \mathfrak{C} = \mathfrak{E}$ are demonstrable. Using Rule 6 we deduce

$$\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \equiv \Phi(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}).$$

Since $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ are B-formulae $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$ is a B-formula. Thus by Lemma 2 there exists a B-formula $\mathfrak{F}$ such that

$$\Phi(\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}) \equiv \mathfrak{F}$$

is demonstrable. Using Rule 3 and (F 35) we deduce

$$\Phi(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) = \mathfrak{F}.$$

Thus the theorem is proved.

We now define C-formulae and D-formulae.

- (i) Every formula of the form $\sim^i X$, where X is a propositional variable, is a C-formula.
- (ii) If $\mathfrak{A}$ is an A-formula then $\sim^i J_m(\mathfrak{A})$ is a C-formula ($i = 2, 3, \dots, m-1$).
- (iii) A formula cannot be a C-formula except in virtue of (i) and (ii).
- (iv) Every C-formula is a D-formula.
- (v) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are D-formulae then $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ is a D-formula.
- (vi) A formula cannot be a D-formula except in virtue of (iv) and (v).

We now prove

Theorem 2. *If $\mathfrak{A}$ is an A-formula then there exists a D-formula $\mathfrak{A}^{**}$ such that $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}^{**}$ is demonstrable.*

We prove the theorem by induction on the number n of occurrences of J_m in $\mathfrak{A}$.

If $n = 1$ $\mathfrak{A}$ is of the form $\sim^i J_m(\sim^j X)$. Let $i = am + k$ where a and k are integers and $0 \leq k \leq m-1$. From (A 2), (A 8) and Rule 1 we deduce

$$\sim^i J_m(\sim^j X) \leftrightarrow \sim^k J_m(\sim^j X).$$

If $k \geq 2$ the theorem is proved. If $k = 0$ we apply Rule (α) to (A 7) deducing

$$J_m(\sim^j X) \leftrightarrow \sim^{j+1} X.$$

Applying Rule 1 to the last two formulae we deduce

$$\sim^i J_m(\sim^j X) \leftrightarrow \sim^{j+1} X.$$

If $k = 1$ we deduce from (A 2) and (A 8) $\sim^m X \leftrightarrow X$. Applying Rule (α) we thus deduce

$$\sim^i J_m(\sim^j X) \leftrightarrow \sim^j X \vee \sum_{i=2}^{m-1} \sim^{i+j} X.$$

We now assume the theorem for n and prove it for $n + 1$. Then $\mathfrak{A}$ is of the form $\Phi(J_m(\sim^i X))$ where Φ contains n occurrences of J_m and $\Phi(X)$ is an A-formula. By our induction hypothesis there exists a D-formula $\Psi(X)$ such that $\Phi(X) \longleftrightarrow \Psi(X)$ is demonstrable. Applying Rule (α) we deduce

$$\Phi(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow \Psi(J_m(\sim^i X)).$$

From (A 2) we deduce

$$(F\ 48) \quad X \vee (Y \vee Z) \longleftrightarrow (X \vee Y) \vee Z, \quad (X \vee Y) \vee Z \longleftrightarrow X \vee (Y \vee Z).$$

Thus, using Rule 2, we deduce a formula of the form

$$\Psi(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^r \Xi_s(J_m(\sim^i X)),$$

where $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_r$ are C-formulae. If Ξ_s is of the form $\sim^j J_m(\chi)$ where $\chi(X)$ is an A-formula then $\Xi_s(J_m(\sim^i X))$ is a C-formula. If Ξ_s is a function of the form $\sim^j$ then $\Xi_s(J_m(\sim^i X))$ is of the form $\sim^j J_m(\sim^i X)$. It follows from the result of the previous paragraph that there exists a D-formula $A_s(X)$ such that $\Xi_s(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow A_s(X)$ is demonstrable.

Since we have shown that there exist $A_1, A_2, \dots, A_r$ such that

$$\Xi_s(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow A_s(X) \quad (1 \leq s \leq r)$$

is demonstrable we deduce from Rule 2

$$\sum_{s=1}^r \Xi_s(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^r A_s(X).$$

Since for all s ($1 \leq s \leq r$) $A_s(X)$ is a D-formula, $\sum_{s=1}^r A_s(X)$ is a D-formula. Applying Rule 1 we deduce

$$\Phi(J_m(\sim^i X)) \longleftrightarrow \sum_{s=1}^r A_s(X).$$

Thus the theorem is proved.

We define an E-formula as follows:

- (i) Every D-formula is an E-formula.
- (ii) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are E-formulae then $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ is an E-formula.
- (iii) A formula cannot be an E-formula except in virtue of (i) and (ii).

We now prove

Theorem 3. *To every formula $\mathfrak{A}$ there corresponds an E-formula $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ is demonstrable.*

By theorem 1 there exists a B-formula $\mathfrak{A}^*$ such that $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^*$ is demonstrable. Using (F 18) we deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{A}^*$. Hence if we can prove $\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ we can deduce $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ from Rule 1. Thus it is sufficient to prove the theorem for B-formulae.

By Rule 2 and (A 4) we can replace $\&$ by $\cdot$ in any B-formula. Thus we can prove by means of (F 3), (F 48), (F 12—15) and Rule 2 a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^v \sum_{j=1}^{u_i} \mathfrak{A}_{ij}$$

where $\mathfrak{A}_{11}, \dots, \mathfrak{A}_{1u_1}, \mathfrak{A}_{21}, \dots, \mathfrak{A}_{vu_v}$ are A-formulae. But for each of the $\mathfrak{A}_{ij}$ we can, by Theorem 2, prove a formula of the form $\mathfrak{A}_{ij} \longleftrightarrow \mathfrak{B}_{ij}$ where $\mathfrak{B}_{ij}$ is a D-formula. Thus, by Rule 2 we deduce a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^v \sum_{j=1}^{u_i} \mathfrak{B}_{ij}.$$

Using (F 48) and Rule 2 we deduce a formula of the form

$$\mathfrak{A}^* \longleftrightarrow \prod_{i=1}^v \sum_{j=1}^{w_i} \mathfrak{C}_{ij}$$

where the $\mathfrak{C}_{ij}$ are C-formulae. Thus the theorem is proved.

We now prove

Theorem 4. *If $\mathfrak{A}$ is an E-formula which always takes the truth-value 1 then $\mathfrak{A}$ is demonstrable.*

In view of Rule 3 it is sufficient to prove the theorem for D-formulae. It follows from the truth-tables for $\sim$ and J_m that when $2 \leq i \leq m-1$ no formula of the form $\sim^i J_m(\mathfrak{A})$ can under any circumstances take the truth-value 1. Thus a necessary and sufficient condition that a D-formula always takes the truth-value 1 is that the set of its generating C-formulae includes for the same propositional variable X formulae of the form $\sim^{i_1} X, \sim^{i_2} X, \dots, \sim^{i_m} X$ where, for all j ($1 \leq j \leq m$)

$$i_j = a_j m + b_j$$

where a_j, b_j are integers, $0 \leq b_j \leq m-1$ and when $j \neq k$, $b_j \neq b_k$. But we can prove all D-formulae of this kind by means of (A 1), (A 8), (F 48), (F 16), (F 17) and Rule 7. Thus the theorem is proved.

We are now in a position to show that the formalisation is complete. Let $\mathfrak{A}$ be a formula which always takes the truth-value 1. Then there exists, by Theorem 3, an E-formula $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ is demonstrable. Hence $\mathfrak{B}$ always takes the truth-value 1 so, by Theorem 4, $\mathfrak{B}$ is demonstrable. From $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{B}$ and (A 2) we deduce $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$. Applying Rule (β) to $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ we deduce $\mathfrak{A}$. Thus the formalisation is complete.

(Eingegangen am 20. August 1951.)

Einführung in die höhere Mathematik

Ein Lehr- und Übungsbuch für technische und gewerbliche Lehranstalten und für die technische Praxis. Von Professor Dr. techn. **A. Hossner**, Wien. Mit 251 Textabbildungen. X, 359 Seiten. 1949. Steif geheftet DM 20.—

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von Professor Dr. phil. **A. Duschek**, Wien.

BAND I. Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. 1949. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

BAND II. Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder. Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. 1950. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

BAND III und IV. In Vorbereitung.

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von Professor Dr. phil. **A. Duschek**, Wien, und Dr. techn. **A. Hochrainer**, Wien.

Teil I. **Tensoralgebra**. Zweite Auflage. Mit 26 Textabbildungen. VI, 129 Seiten. 1948. Steif geheftet DM 9.—

Teil II. **Tensoranalysis**. Mit 64 Textabbildungen. VII, 338 Seiten. 1950. Steif geheftet DM 24.80

Teil III. In Vorbereitung.

Moderne algebraische Geometrie

Die idealtheoretischen Grundlagen. Von Professor Dr. **W. Gröbner**, Innsbruck. XII, 212 Seiten. 1949. Steif geheftet DM 23.90

Integraltafel

Von Professor Dr. **W. Gröbner**, Innsbruck, und Professor Dr. **N. Hofreiter**, Wien.

Erster Teil. **Unbestimmte Integrale**. VIII, 166 Seiten. 1949. Steif geheftet DM 22.70

Zweiter Teil. **Bestimmte Integrale**. VI, 204 Seiten. 1950. Steif geheftet DM 24.—

Lehrbuch der Funktionentheorie

Von Professor Dr. **H. Hornich**, Graz. Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten. 1950. Steif geheftet DM 19.50; Ganzleinen DM 21.60

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von Professor Dr. S. Flügge, Marburg a. L., und Professor Dr. F. Trendelenburg, Erlangen, unter Mitwirkung von Professor Dr. W. Bothe, Heidelberg, Professor Dr. F. Hund, Frankfurt a. M., und Professor Dr. P. Harteck, Hamburg.

Fünfundzwanzigster Band. Mit 345 Abbildungen und 32 Energieschemata.
VII. 650 Seiten, 1951. DM 76.—; Ganzleinen DM 79.—

Inhaltsübersicht

Hydrodynamisches Verhalten von Makromolekülen in Lösung. Von Professor Dr. W. Kuhn, Professor Dr. H. Kuhn, Dr. P. Buchner, Basel. Mit 41 Textabbildungen.

Schallgeschwindigkeit und Molekülstruktur in Flüssigkeiten. Von Privatdozent Dr. W. Schaaffs, Berlin-Siemensstadt. Mit 41 Textabbildungen.

Fehlordnungserscheinungen und Leitungsvorgänge in Ionen- und elektronenleitenden festen Stoffen. Von Professor Dr. K. Hauße, Greifswald. Mit 67 Textabbildungen.

Der elektrische Lichtbogen. Von Privatdozent Dr. H. Maecker, Kiel. Mit 54 Textabbildungen.

Dielektrisches Verhalten im Zusammenhang mit dem polaren Aufbau der Materie. Von Professor Dr. F. H. Müller, Marburg/Lahn und Privatdozent Dr. Chr. Schmelzer, Heidelberg. Mit 101 Textabbildungen.

Theorie der elastischen Streuung von Korpuskeln an zusammengesetzten Atomkernen. Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg/Lahn. Mit 18 Textabbildungen.

Die Energieschemata der leichten Atomkerne. Von Dr. U. Cappeller, Marburg/Lahn. Mit 23 Textabbildungen und 32 Energieschemata.

Inhalt der Bände XI—XXV. — Namen- und Sachverzeichnis.

Einundzwanzigster Band. Mit 188 Abbildungen. III, 361 Seiten. 1945. DM 48.—

Zweiundzwanzigster Band. Mit 195 Abbildungen. III, 332 Seiten. 1949. DM 48.—

Dreiundzwanzigster Band. Mit 215 Abbildungen. III, 416 Seiten. 1950. DM 59.60

Vierundzwanzigster Band. Mit 232 Abbildungen. III, 451 Seiten. 1951. DM 48.60

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages / Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.